МГЗПИ

Ф. Л. Варпаховский,
А. С. Солодовников

АЛГЕБРА

Министерство просвещения РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Ф. Л. Варпаховский,
А. С. Солодовников

АЛГЕБРА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ
ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Издание 2-е, переработанное

Учебное пособие
для студентов-заочников I курса
физико-математических факультетов
педагогических институтов

МОСКВА ПРОСВЕЩЕНИЕ 1981

Рекомендовано к печати Главным управлением
высших и средних педагогических учебных заведений

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *М. М. Глухов*,
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
МГЗПИ *Д. В. Алексеевский*

Редактор МГЗПИ *О. А. Павлович*

В $\frac{60602-441}{103(03)-81}$ заказное 4309020400

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой первую часть учебного пособия по курсу «Алгебра и теория чисел», изучаемому на физико-математических факультетах пединститутов. Она охватывает в основном материал первого семестра.

Алгебра, возникшая как наука о преобразованиях над числами, долгое время занималась почти исключительно числовыми уравнениями. Кульминационным моментом этого раннего развития алгебры было открытие Ф. Виета, предложившего буквенные обозначения (для известных и неизвестных величин). Правила операций над числами получили четкое символическое выражение ($a + b = b + a$ и т. п.), что немало способствовало успешному развитию теории алгебраических уравнений, которая вплоть до начала XIX века составляла основной предмет алгебры. Важнейшие результаты, полученные в этой области в первой половине прошлого века, неожиданным образом оказались связанными с операциями, которые применялись уже не к числам, а к объектам иной природы. Такого рода операции потребовались и в теории систем линейных уравнений и линейных преобразований, игравшей первостепенную роль в развитии алгебры прошлого века. К началу XX века постепенно стала складываться точка зрения на алгебру как на науку об операциях над объектами произвольной природы; от этих операций требуется только, чтобы они удовлетворяли определенным правилам (аксиомам). В наше время такая точка зрения получила всеобщее признание.

В руководстве по алгебре для студентов невозможно, разумеется, отразить весь исторический процесс развития и изменения алгебраической науки. Тем не менее разумно сохранить основную линию этого развития — от операций над числами к операциям над произвольными объектами, которые удовлетворяют некоторым заданным требованиям. При таком подходе начинающий читатель лишь постепенно — и притом весьма естественно — вводится в мир абстрактных идей и понятий современной алгебры. В этом духе и построена данная книга.

Книга открывается вводной главой, посвященной самым первым, простейшим понятиям теории множеств и математической логики. Здесь в соответствии с новой программой для педагогических институтов рассматриваются операции над множествами, бинарные отношения, понятия высказывания и предиката, принцип математической индукции, вводятся необходимые теоретико-множественные и логические символы. В отдельных случаях изложение несколько выходит за рамки программы. В частности, сделана попытка дать по возможности простое и строгое представление об основных способах рассуждений, применяемых в математике, и с этих позиций объяснить, например, вопрос о необходимых и достаточных условиях, обратной и противоположной теоремах и т. п. В первой главе по существу нет доказательств, здесь лишь вводятся и объясняются на примерах различные понятия. Можно считать, что эта глава занимает в курсе особое место — по существу она могла бы служить введением к любому другому математическому руководству в современном изложении. Ее содержание должно способствовать более глубокому усвоению курса в целом и давать как бы предварительный «заряд» общематематической культуры.

Вторая глава непосредственно примыкает к школьному курсу алгебры. Здесь изучаются системы линейных уравнений и линейных неравенств над «полем» действительных чисел, что естественным образом приводит к понятиям арифметического вектора и арифметического векторного пространства, которые рассматриваются в следующей, третьей главе. Такой (несколько измененный по сравнению с программой) порядок изложения представляется оправданным по ряду причин. Во-первых, существует определенная аналогия между теориями систем линейных уравнений и систем линейных неравенств, что делает желательным параллельное изучение обеих теорий. Во-вторых, при такой последовательности материал можно изложить достаточно элементарно. Наконец, такой порядок делает более естественным восприятие абстрактных понятий линейного пространства, линейного отображения и т. д.

Четвертая глава посвящена матрицам и определителям. Аппарат теории матриц играет важнейшую роль в следующей, второй части курса алгебры, а также широко используется в самых различных разделах математики.

Ориентация на читателя, изучающего курс математики заочно, заставила авторов стремиться к возможно большей детализации. Материал каждого параграфа разбит на рубрики; каждая рубрика представляет собой небольшой логически законченный отрывок текста. В книге содержится целый ряд подробно разобранных примеров, охватывающих в основном все типы задач, которые должен уметь решать студент, овладевший курсом.

В настоящее, второе издание книги внесен ряд добавлений и изменений, имеющих целью сделать изложение как более полным, так и более доступным. В частности, существенные изменения касаются первой главы (понятия кортежа и отношения, законы логики) и раздела об определителях (новое построение теории определителей, не использующее понятия перестановки). Авторы выражают искреннюю признательность за советы и критические замечания, которые сыграли важную роль в работе над настоящим изданием.

Глава I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ЛОГИКИ

§ 1. МНОЖЕСТВА

1. Понятие множества. Понятие множества является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Оно было введено в математику создателем теории множеств немецким ученым Георгом Кантором (1845—1918). Следуя Кантору, будем считать, что термин «множество» употребляется для обозначения совокупности каких-либо различных, доступных нашему воображению предметов, объединенных в одно целое. Предметы, из которых составлено множество, будем называть *элементами* этого множества.

Вот что сказано у самого Кантора: «Под «множеством» мы понимаем любое объединение в одно целое M определенных вполне различаемых объектов m из нашего восприятия или мысли (которые называются «элементами» M)».

Это описание понятия множества нельзя считать его математическим определением, так как всякое математическое определение выражает определяемое понятие через другие, уже известные понятия. Понятие же множества не удается свести к каким-либо другим, известным понятиям и можно только постараться пояснить его на примерах.

Примерами множеств могут служить множество жителей Москвы, множество фраз этой книги, множество действительных (вещественных) чисел, множество всех одноклеточных организмов, множество теорем геометрии и т. п. Все эти примеры вполне согласуются с описанием Кантора, которое не содержит никаких ограничений ни в отношении природы элементов множества, ни в отношении их количества. Задавать множества разрешается как угодно, лишь бы для каждого множества и каждого объекта можно было (в принципе) установить, является ли данный объект элементом данного множества.

В то же время из этих примеров видно, что канторовское описание понятия множества является очень общим и чрезвычайно расплывчатым. История развития математики показала, что неаккуратное пользование понятием множества может привести к нелепостям. В дальнейшем будут рассматриваться (или подразумеваться) не множества вообще, а некоторые определенные множества объектов математической природы, такие, как множества натуральных или рациональных чисел, множество многочленов с целыми коэффициентами, множество корней какого-нибудь алгебраического уравнения и т. д.

По установившейся традиции множества обозначают прописными, а их элементы — строчными буквами. Запись $x \in A$ означает, что x является элементом множества A (принадлежит множеству A). Аналогично запись $x \notin A$ означает, что x не является элементом множества A. Запись

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \tag{1}$$

выражает то обстоятельство, что множество A состоит в точности из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Таким образом, при задании множества в форме (1) непосредственно, путем перебора, указываются все элементы, составляющие это множество.

Следовательно, в форме (1) представимы лишь такие множества, все элементы которых можно перебрать в некотором порядке, т. е. множества, содержащие определенное натуральное число элементов. Такие множества называют *конечными*. Множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ конечно (два элемента), множество целых чисел, больших 50, но меньших 100, также конечно (49 элементов) и т. д.

Конечные множества, содержащие n элементов, называются *n-элементными*. Так, говорят о множествах одноэлементных, пятиэлементных, стаэлементных и т. п.

Для удобства вводится также и нульэлементное множество — с числом элементов, равным нулю, т. е. множество, вовсе не имеющее элементов. Такое множество принято называть *пустым*. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Целесообразность введения пустого множества становится понятной, если учесть, что иногда приходится рассуждать о множествах, про которые заранее неизвестно, содержат ли они вообще хотя бы один элемент. Например, для системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ y^2 + u^2 = x^2 \end{cases}$$

трудно сразу определить, существует ли четверка положительных целых чисел x, y, z, u, удовлетворяющих уравнениям системы. Не зная же этого и не располагая понятием пустого множества, мы были бы не в праве говорить о множестве целочисленных положительных решений данной системы. Понятие пустого множества удобно еще и тем, что с его помощью удается единообразно формулировать некоторые теоремы. Например, всякую теорему о неразрешимости какого-нибудь уравнения можно выразить так: множество решений этого уравнения пусто.

Когда конечное множество содержит много элементов, задание его в форме (1) громоздко или даже практически неосуществимо. *Бесконечные* множества, т. е. множества, не являющиеся конечными, вообще невозможно представить в форме (1). Например, бесконечное множество всех целых чисел нельзя полностью перебрать, поскольку никакой процесс перебора элементов этого множества никогда не закончится.

В таких случаях применяется другой способ задания множества, который состоит в указании определяющего или, как говорят, *характеристического* свойства его элементов. Свойство считается характеристическим для некоторого множества, если этому множеству принадлежат в точности те элементы, которые обладают данным свойством. Например, свойство «быть квадратом целого числа» задает (бесконечное) множество всех квадратов целых чисел. При этом употребляется следующая запись:

$$\{x \mid x \text{ является квадратом целого числа}\}$$

(читается: «множество тех x, которые являются квадратами целых чисел»). Вообще, обозначив символом $P(x)$ характеристическое свойство элементов множества A, будем писать:

$$A = \{x \mid P(x)\}. \qquad (2)$$

Посредством характеристического свойства, т. е. в форме (2), можно задавать любые (и конечные, и бесконечные) множества. Например, конечное множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ допускает такое задание:

$$\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\},$$

а бесконечное множество рациональных чисел можно представить так:

$$\{r \mid r = \frac{p}{q}, \text{ где } p \text{ и } q \text{ — целые числа и } q \neq 0\}.$$

Вопросы и упражнения

1. Привести несколько примеров конечных и бесконечных множеств.

2. Записать множество целых решений неравенства $-3 < x < 2$ в формах (1) и (2).

3. Доказать, что множество положительных целых решений уравнения $x^2 = 2y^2$ является пустым.

4. Конечно или бесконечно множество делителей какого-нибудь целого числа?

5. Конечно или бесконечно множество целых чисел, делящихся на 5, но не делящихся на 7?

2. Подмножества. Будем говорить, что множество A является *подмножеством* множества B, если каждый элемент A принадлежит множеству B. Всякое подмножество A множества B состоит, следовательно, т о л ь к о из элементов множества B и является некоторой *частью* множества B. Поэтому наряду с термином «подмножество множества B» пользуются термином «часть множества B». Тот факт, что A является подмножеством B, символически записывают в следующем виде:

$$A \subset B.$$

Знак $\subset$ называется *знаком включения*, отношение $A \subset B$ — *отношением включения*. Говорят также, что множество A *включено* в множество B.

Например, множество **N** натуральных чисел является подмножеством множества **Q** рациональных чисел, которое в свою очередь служит подмножеством множества **R** действительных чисел. Следовательно,

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Q} \text{ и } \mathbf{Q} \subset \mathbf{R},$$

или, короче,

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

В этом примере **N** оказывается подмножеством и для **R**. Ясно, что и вообще, если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$. Указанное свойство называют свойством *транзитивности* отношения включения.

Из определения подмножества видно, что каждое множество является подмножеством самого себя: $A \subset A$. Точно так же пустое множество $\varnothing$ будет подмножеством любого множества A: $\varnothing \subset A$, иначе пустое множество содержало бы элемент, не принадлежащий A, тогда как оно вообще не содержит никаких элементов. Исключив эти очевидные «крайние» случаи, мы получим так называемые *собственные* подмножества множества A, т. е. такие подмножества, которые не пусты и не совпадают с A. Например, **N** является собственным подмножеством **Q**. Собственное подмножество множества A называют также *правильной частью* A.

Если одновременно выполняются включения $A \subset B$ и $B \subset A$, то всякий элемент из A принадлежит B и обратно. В этом случае множества A и B оказываются состоящими из одних и тех же элементов. Такие множества называют *равными* и пишут: $A = B$. Таким образом, для доказательства равенства множеств A и B нужно доказать, что любой элемент A принадлежит B ($A \subset B$) и любой элемент B принадлежит A ($B \subset A$). С помощью понятия равенства множеств удобно определять *равносильность* уравнений (систем уравнений, неравенств). Именно, два уравнения считаются *равносильными*, если множество A решений одного из уравнений совпадает с множеством B решений другого уравнения ($A = B$).

Понятие равенства множеств оказывается удобным и в других вопросах, связанных с решением уравнений и систем уравнений. Обозначим, например, через A множество пар (x, y), являющихся решениями системы:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x \cdot y = 2, \end{cases}$$

а через B — множество пар (z_1, z_2), составленных из двух различных решений z_1, z_2 уравнения $z^2 - 3z + 2 = 0$. Пользуясь теоремой Виета, легко показать, что $A = B$. Отсюда ясно, что решение данной системы сводится к решению одного квадратного уравнения.

Вопросы и упражнения

1. Перечислить все подмножества множества $\{1, 2, 3\}$.

2. Имеет ли пустое множество какое-нибудь собственное подмножество?

3. Конечно ли множество всех собственных подмножеств множества натуральных чисел?

§ 2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. Произведение множеств. Во многих случаях приходится из каких-то одних множеств образовывать некоторые другие множества. В связи с этим вводится ряд *операций* над множествами. Рассмотрим сначала операцию *умножения* множеств.

Произведением (или *пересечением*) двух множеств A и B называется множество C, составленное из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно каждому из множеств A и B. Таким образом, произведение двух множеств представляет собой множество всех общих элементов этих двух множеств. Например, произведением множеств $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 4\}$ будет одноэлементное множество $\{3\}$. Произведением множества нечетных чисел и множества целых чисел, делящихся на 5, является множество целых чисел, оканчивающихся цифрой 5. Произведение множеств A и B обозначается символом $A \cdot B$ (или просто AB). В теории множеств пользуются также обозначением $A \cap B$. Если множества A и B не имеют общих элементов, то их произведение пусто: $AB = \varnothing$. Такие множества A и B называются *непересекающимися*.

Чтобы наглядно проиллюстрировать понятие произведения, рассмотрим на координатной плоскости xOy множество A тех точек, которые лежат на прямой a и над этой прямой (на рис. 1 это множество заштриховано вертикальными линиями), и аналогичное множество B (заштриховано горизонтальными линиями). Произве-

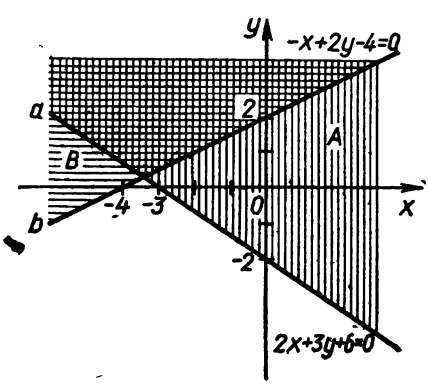


Рис. 1

дением $AB = C$ будет часть плоскости, заштрихованная дважды (включая граничные участки прямых).

Множествам A, B и C этого примера можно дать и аналитическое истолкование. Пусть прямые a и b заданы соответственно уравнениями $2x + 3y + 6 = 0$ и $-x + 2y - 4 = 0$. Множество пар (x, y), удовлетворяющих уравнению $2x + 3y + 6 = 0$, геометрически представляется множеством точек плоскости, лежащих на прямой a, а множество пар (x, y), удовлетворяющих строгому неравенству $2x + 3y + 6 > 0$, — множеством точек, лежащих над прямой a. Отсюда видно, что множество пар (x, y), для которых

$$2x + 3y + 6 \geqslant 0, \tag{1}$$

изображается множеством A. Точно так же множество пар (x, y), для которых

$$-x + 2y - 4 \geqslant 0, \tag{2}$$

представляется множеством B. Следовательно, множество пар (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6 \geqslant 0, \\ -x + 2y - 4 \geqslant 0, \end{cases} \tag{3}$$

изображается множеством C.

Рассмотрим еще один пример. Пусть даны уравнения:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \tag{4}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \tag{5}$$

$$(x^2 - 3x + 2)^{10} + (x^2 - 5x + 6)^{20} = 0. \tag{6}$$

Обозначим множества их действительных решений соответственно через A, B и C. Очевидно, что $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Уравнению (6) удовлетворяют те и только те значения x, которые обращают в нуль одновременно обе скобки, т. е. являются одновременно решениями как уравнения (4), так и уравнения (5). Значит, $C = AB = \{2\}$.

В силу определения произведение множеств A и B обладает тем свойством, что оно содержится в каждом из этих множеств. С другой стороны, в силу того же определения никакое «более широкое» множество (полученное присоединением к произведению A и B хотя бы одного нового элемента) указанным свойством не обладает. В этом смысле произведение множеств A и B является «максимальным» множеством, содержащимся одновременно и в A, и в B.

Понятие произведения обобщается на случай, когда «сомножителей» больше, чем два. Делается это следующим образом. Пусть каждому α из некоторого множества I поставлено в соответствие некоторое определенное множество, которое удобно обозначить символом A_α. Тогда произведением всех множеств A_α (α — любой элемент из множества I) будем называть множество A, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому множеству A_α. При этом пользуются обозначениями:

$$A = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha \quad \text{или} \quad A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Пусть, например, для каждого целого положительного k A_k означает множество тех вещественных чисел x, для которых $|x| < 1 + \frac{1}{k}$, т. е. $A_k = \{x \mid |x| < 1 + \frac{1}{k}\}$. Тогда если модуль числа x не превосходит 1, то x принадлежит каждому множеству A_k, но никакое число x, модуль которого больше 1, не может принадлежать всем множествам A_k (скажем, число 1,016 не входит в A_{100}, так как $|1{,}016| > 1 + \frac{1}{100}$). Обозначив через Z^+ множество целых положительных чисел, получим, следовательно,

$$\{x \mid |x| \leqslant 1\} = \prod_{k \in Z^+} A_k.$$

Вопросы и упражнения

1. Найти пересечение множества четных чисел и множества чисел, кратных трем. Записать результат в форме (2) § 1.

2. Может ли пересечение трех множеств совпадать с пересечением двух из них?

3. Показать, что если $A \subset B$, то $AB = A$.

4. Для каждого натурального положительного n A_n означает множество тех вещественных чисел x, для которых

$$|x| < n + (-1)^{n+1}, \text{ т. е. } A_n = \{x \mid |x| < n + (-1)^{n+1}\}.$$

Найти $\prod_{n \in Z^+} A_n$.

2. Сумма множеств. *Суммой* (или *объединением*) двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B. Таким образом, для получения суммы A и B нужно к элементам множества A присоединить элементы из B, не входящие в A (или, наоборот, добавить к множеству B не входящие в него элементы A). Например, суммой множеств $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 4\}$ будет множество $\{1, 2, 3, 4\}$. Суммой множества нечетных чисел и множества чисел, кратных 5, является множество целых чисел, оканчивающихся цифрами 1, 3, 5, 7, 9 и 0. Сумма множеств A и B обозначается символом $A + B$ или символом $A \cup B$.

Чтобы получить наглядное представление о сумме множеств, вернемся к множествам A и B рисунка 1. Их суммой C будет множество точек той части плоскости, которая заштрихована хотя бы один раз (включая граничные участки прямых).

В этом примере множествам A, B и C снова можно дать аналитическое истолкование. Напомним, что множество A изображает множество решений неравенства

$$2x + 3y + 6 \geqslant 0,$$

а множество B — множество решений неравенства

$$-x + 2y - 4 \geqslant 0.$$

Таким образом, сумма C множеств A и B представляет собой множество решений совокупности неравенств (1), (2), т. е. множество тех пар (x, y), которые удовлетворяют хотя бы одному из неравенств (1), (2).

Приведем еще один пример. Выше рассматривались уравнение (4) с множеством решений $A = \{1, 2\}$ и уравнение (5) с множеством решений $B = \{2, 3\}$. Найдем множество C решений уравнения

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Ясно, что произведение слева обращается в нуль для тех чисел x, которые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений (4), (5). Поэтому $C = A + B$, т. е. $C = \{1, 2, 3\}$.

В силу определения сумма множеств A и B обладает тем свойством, что она содержит каждое из этих множеств. Вместе с тем в силу того же определения никакое «более узкое» множество (полученное удалением из суммы хотя бы одного элемента) указанным свойством не обладает. В этом смысле сумма множеств A и B представляет собой «минимальное» множество, содержащее одновременно оба множества A и B.

Как и понятие произведения, понятие суммы обобщается на случай любого числа «слагаемых». Пусть снова каждому $\alpha \in I$ соответствует некоторое определенное множество A_α. Суммой всех множеств A_α считается множество A, составленное из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_α. Для такой суммы употребляется обозначение

$$A = \sum_{\alpha \in I} A_\alpha \text{ или } A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha .$$

Если, например, для каждого неотрицательного целого числа k через Q_k обозначить множество рациональных чисел, не превосходящих по модулю k, $Q_k = \{r \mid |r| \leqslant k\}$, то для множества $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел получим:

$$\mathbf{Q} = \sum_{k \in \mathbf{N}} Q_k.$$

Вопросы и упражнения

1. Найти сумму множества A четных цифр и множества B цифр, кратных 3.

2. Показать, что $AB \subset A + B$. В каком случае $AB = A + B$?

3. Какое самое меньшее и самое большее число элементов насчитывается в сумме $A + B$, если A содержит 5, а B — 8 элементов?

4. $I = \{1, 5, 6\}$, $A_1 = \{x, x^2, x^3\}$, $A_5 = \{x^2 + x^3, x^4\}$, $A_6 = \{x + x^2, x^3\}$ (все множества A_α являются множествами многочленов). Найти $\sum_{\alpha \in I} A_\alpha$, записав это множество в форме (1) § 1.

3. Дополнение множества, разность и симметрическая разность множеств. Некоторые свойства операций над множествами. Пусть множество A является подмножеством множества $B : A \subset B$. Дополнением множества A в множестве B будем называть множество всех тех элементов из B, которые не принадлежат A. Так, дополнение множества целых чисел, кратных 3, в множестве всех целых чисел состоит из чисел, дающих при делении на 3 остаток 1 или 2. Дополнение A в B обозначается в теории множеств символом $C_B A$ (буква C в этом обозначении происходит от французского слова complément — дополнение). Применяются также и некоторые сокращенные обозначения — $\overline{A}_B$ или A'_B. Мы будем пользоваться первым из них — $\overline{A}_B$. Часто приходится рассматривать такие множества, которые все являются подмножеством некоторого фиксированного множества U. Например, при исследовании решений уравнений или неравенств с одним неизвестным приходится иметь дело с различными подмножествами множества $\mathbf{R}$ действительных чисел. В таких случаях множество U, в котором берутся дополнения, предполагается известным, поэтому говорят просто о дополнении A и обозначение $\overline{A}_U$ заменяют на $\overline{A}$.

Из определения дополнения видно, что дополнение самого множества U пусто, т. е. $\overline{U} = \varnothing$, а дополнение пустого множества совпадает с U. Далее, если два непересекающихся множества A и B в сумме дают U ($AB = \varnothing$, $A + B = U$), то каждое из них служит дополнением другого. В частности, поскольку $A\overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = U$, то дополнением $\overline{A}$ служит A, т. е. $\overline{\overline{A}} = A$. Например, дополнениями друг для друга являются подмножества рациональных и иррациональных чисел множества $\mathbf{R}$ действительных чисел.

На рисунке 2 изображено множество A решений неравенства $2x + 3y + 6 \geqslant 0$ (заштрихованная часть плоскости над прямой $2x + 3y + 6 = 0$ и сама эта прямая) и его дополнение $\overline{A}$, являющееся множеством решений «обратного» неравенства $2x + 3y + 6 < 0$ (множество точек под прямой $2x + 3y + 6 = 0$).

Обобщением операции дополнения является операция *разности* множеств. Под разностью двух множеств B и A понимается множество всех тех элементов множества B, которые не принадлежат множеству A (при этом, вообще говоря, не предполагается, что $A \subset B$).

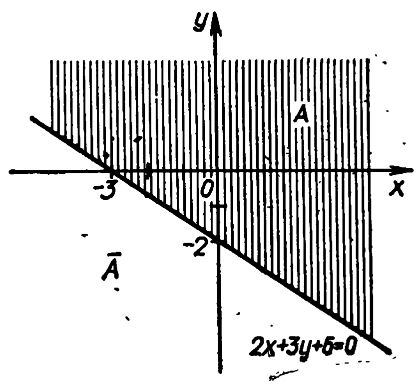


Рис. 2

Например, разностью множества **Q** рациональных чисел и множества $\mathbf{R}^+$ положительных действительных чисел будет множество рациональных чисел, меньших или равных 0. Разность множеств B и A обозначается символом $B - A$ или символом $B \setminus A$ (в обоих случаях читается «B минус A»).

Из определения разности множеств видно, что в случае, когда $A \subset B$, разность $B - A$ совпадает с дополнением $\overline{A}_B$ множества A в множестве B. Определение разности показывает также, что в общем случае $B - A$ совпадает с дополнением $\overline{AB}_B$ множества AB в множестве B.

Разности $B - A$ и $A - B$ не только не совпадают (за исключением случая $A = B$), но даже не пересекаются. В самом деле, из условия $x \in B - A$ следует, что $x \in B$, тогда как из условия $x \in A - B$ вытекает, что $x \notin B$, поэтому никакой элемент x не может принадлежать одновременно обоим множествам $B - A$ и $A - B$.

Возвращаясь к рисунку 1, мы видим, что разностью множеств B и A, представленных на этом рисунке, является множество точек координатной плоскости, заштрихованное только горизонтальными линиями (включая точки прямой b, расположенные левее точки пересечения прямых a и b). Аналогично множество точек плоскости, заштрихованное только вертикальными линиями (включая все точки прямой a, лежащие правее точки пересечения прямых a и b), представляет собой разность $A - B$.

Учитывая аналитическое истолкование множеств A и B, указанное на с. 10, мы получаем, что множество $B - A$ изображает множество пар (x, y), удовлетворяющих неравенству (2)

$$-x + 2y - 4 \geqslant 0$$

и не удовлетворяющих неравенству (1)

$$2x + 3y + 6 \geqslant 0.$$

Иными словами, множество $B - A$ изображает множество решений системы неравенств

$$\left.\begin{aligned} -x + 2y - 4 \geqslant 0, \\ 2x + 3y + 6 < 0. \end{aligned}\right\}$$

Аналогично истолковывается разность $A - B$.

Иногда удобно пользоваться понятием так называемой *симметрической разности* двух множеств. Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$(A - B) + (B - A);$$

его обычно обозначают символом $A \nabla B$. Множество $A \nabla B$, таким образом, состоит из всех тех элементов, которые принадлежат либо только A, либо только B. Так, для множеств $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ имеем: $A - B = \{1, 2\}$, $B - A = \{4\}$, $A \nabla B = \{1, 2, 4\}$. Чтобы проиллюстрировать применение понятия симметрической разности, рассмотрим уравнение

$$\frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)^{10} + (x^2 - 5x + 6)^{20}} = 0.$$

Пусть A означает множество корней трехчлена $x^2 - 3x + 2$, а B — множество корней трехчлена $x^2 - 5x + 6$: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Поскольку этому уравнению удовлетворяют те значения x, которые обращают в нуль числитель, но не обращают в нуль знаменатель, то множество его решений совпадает с $A \nabla B = \{1, 3\}$.

Рассмотрим некоторые важные свойства операций умножения, сложения и дополнения. Прежде всего непосредственно из определения этих операций вытекает справедливость следующих равенств (предполагается, что множества A, B, C являются подмножествами множества U):

1. $AB = BA$. 1'. $A + B = B + A$.
2. $(AB)C = A(BC)$. 2'. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $AA = A$. 3'. $A + A = A$.
4. $AU = A$. 4'. $A + \varnothing = A$.
5. $A\overline{A} = \varnothing$. 5'. $A + \overline{A} = U$.

Свойство 2, в частности, выражает тот факт, что произведение трех множеств не зависит от порядка, в котором эти множества умножаются. Аналогичный смысл имеет свойство 2'. Оба эти свойства остаются верными также и для л ю б о г о числа сомножителей или слагаемых. Можно, следовательно, писать $A + B + C + D$, не указывая (с помощью скобок), в каком порядке складываются эти множества.

Операции умножения и сложения связаны между собой так называемыми *дистрибутивными* (*распределительными*) законами:

6. $A(B + C) = AB + AC$. 6'. $A + (BC) = (A + B)(A + C)$.

Докажем для примера свойство 6. Для доказательства равенства двух множеств нужно показать, что каждое из них содержится в другом. Покажем сначала, что $A(B + C) \subset AB + AC$. Пусть $x \in A(B + C)$. Значит, $x \in A$ и $x \in B + C$, т.е. $x \in A$ и либо $x \in B$, либо $x \in C$. Получаются, следовательно, два случая: а) $x \in A$ и $x \in B$; б) $x \in A$ и $x \in C$. В случае а) $x \in AB$, значит, $x \in AB + AC$. В случае б) $x \in AC$ и, значит, снова $x \in AB + AC$. Мы показали, что из принадлежности произвольного элемента x множеству $A(B + C)$ вытекает его принадлежность множеству $AB + AC$, т. е. что $A(B + C) \subset AB + AC$. Обратное включение, а также включения $A + (BC) \subset (A + B)(A + C)$ и $(A + B)(A + C) \subset A + (BC)$ доказываются аналогично.

Укажем еще на связь операций дополнения, сложения и пересечения, которая выражается равенствами:

7. $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$. 7'. $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

Например, включение $\overline{AB} \subset \overline{A} + \overline{B}$ доказывается так: пусть $x \in \overline{AB}$, тогда $x \notin AB$, и получаются два случая — либо $x \notin A$, либо $x \notin B$. В первом случае $x \in \overline{A}$ и, значит, $x \in \overline{A} + \overline{B}$, во втором — $x \in \overline{B}$, а потому снова $x \in \overline{A} + \overline{B}$.

Такими же рассуждениями доказывается включение $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{AB}$, а также включения $\overline{A + B} \subset \overline{A}\overline{B}$ и $\overline{A}\overline{B} \subset \overline{A + B}$. Свойство 7 читается так: «дополнение суммы двух множеств совпадает с произведением дополнений этих множеств». Можно проверить, что то же самое верно и для дополнения суммы любого числа множеств.

Впервые система с тремя операциями, удовлетворяющими свойствам 1—7, 1′—7′, рассматривалась английским математиком Джорджем Булем (1815—1864), в связи с чем такие системы получили название *булевых алгебр*. Можно, следовательно, сказать, что система всех подмножеств некоторого множества U является булевой алгеброй по отношению к введенным операциям сложения, умножения и дополнения.

Вопросы и упражнения

1. Проверить, что множество $A = \left\{x \,\middle|\, \frac{1}{x} > 0\right\}$ и множество $B = \{x \mid x \leqslant 0\}$ служат дополнениями друг для друга в множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел.

2. Показать, что если $A_1 \subset A$ и $A_2 \subset \overline{A}$, то $A_1A_2 = \varnothing$.

3. Доказать два включения: $A + (BC) \subset (A + B)(A + C)$, $(A + B)(A + C) \subset A + (BC)$.

4. Убедиться, что равенства 1′—7′ получаются из равенств 1—7 заменой знака умножения на знак сложения, знака сложения на знак умножения, множества U на множество $\varnothing$ и множества $\varnothing$ на множество U.

§ 3. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. ОТНОШЕНИЯ

1. Кортежи и прямое произведение множеств. При задании какого-нибудь конечного множества в форме (1) § 1 безразлично, в каком порядке указываются элементы этого множества. Скажем, множества $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$ совпадают, так как они состоят из одних и тех же элементов, хотя в первой записи элемент a указывается прежде элемента b, а во второй записи наоборот. При этом предполагается, что один и тот же элемент не может входить в множество дважды,— например, запись $\{a, a\}$ означает множество, состоящее из единственного элемента a, т. е. одноэлементное множество $\{a\}$.

Часто, однако, приходится иметь дело с *последовательностями* из двух объектов, когда задаются какие-либо два элемента (быть может, одинаковых) и указывается, какой из этих элементов считается первым, а какой — вторым.

В геометрии, например, каждая точка плоскости однозначно определяется последовательностью двух чисел x и y, называемых координатами точки (первое число x этой последовательности является абсциссой, а второе число y — ординатой точки).

Последовательность, первым элементом которой является x_1, а вторым — x_2, называется *упорядоченной парой элементов* x_1, x_2 и обозначается символом $<x_1, x_2>$. Элементы x_1 и x_2 называются соответственно *первой и второй координатой пары* $<x_1, x_2>$.

Иногда упорядоченную пару $<x_1, x_2>$ обозначают также символом (x_1, x_2). Порядок элементов в каждой из этих записей как раз и служит указанием на то, какой из элементов считается первым, а какой — вторым.

Из сказанного видно, что две пары $<x_1, x_2>$ и $<y_1, y_2>$ совпадают тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$. В частности, пары (a, b) и (b, a) — в отличие от множеств $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$ — не совпадают.

Заметим, что данное выше определение упорядоченной пары как последовательности из двух элементов нельзя считать строгим, поскольку само понятие последовательности нуждается в определении. Строгое определение упорядоченной пары достигается путем сведения этого понятия к понятию множества, которое считается исходным и не подлежит определению. Именно, упорядоченной *парой* $<x_1, x_2>$ называется двухэлементное множество $\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$. При таком определении нетрудно получить *строгое доказательство* того факта, что из $<x_1, x_2> = <y_1, y_2>$ вытекает $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$, — мы рекомендуем читателю сделать это самостоятельно.

Подобно тому как точки плоскости задаются *упорядоченными парами* чисел, точки пространства определяются *упорядоченными тройками* своих координат, т. е. последовательностями трех чисел x, y, z, где x — первое, y — второе, а z — третье число последовательности. Точное определение упорядоченной тройки элементов x_1, x_2, x_3 получается сведением этого понятия к понятию упорядоченной пары, а именно:

Упорядоченной тройкой элементов x_1, x_2, x_3 называется упорядоченная пара $<<x_1, x_2>, x_3>$. Эта тройка обозначается символом $<x_1, x_2, x_3>$. Элементы x_1, x_2, x_3 называются *координатами тройки* (соответственно первой, второй и третьей).

Точно таким же образом последовательность четырех элементов x_1, x_2, x_3, x_4 (упорядоченная четверка элементов) определяется как пара $<<x_1, x_2, x_3>, x_4>$. Вообще:

Упорядоченной n-кой элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 2)$ называется пара $<<x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$. Эта n-ка обозначается символом $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$, а элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами n-ки*.

Упорядоченную n-ку $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ $(n \geqslant 2)$ называют еще *кортежем длины n*. С целью распространить понятие кортежа длины n на случай $n = 1$ условливаются считать дополнительно всякое одноэлементное множество кортежем длины 1.

Из определения кортежа длины n легко выводится, что два кортежа $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ и $<y_1, y_2, \ldots, y_n>$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_n = y_n$.

Итак, строгое определение кортежа длины n складывается из следующих пунктов:

1. Кортежем $<x_1>$ длины 1 называется одноэлементное множество $\{x_1\}$.
2. Кортежем $<x_1, x_2>$ длины 2 называется множество $\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$.
3. Кортежем $<x_1, x_2, ..., x_n>$ длины n при $n > 2$ называется кортеж $<<x_1, x_2, ..., x_{n-1}>, x_n>$ длины 2.

Рассмотренные выше координатные двойки и тройки чисел являются кортежами, все элементы которых принадлежат множеству $\mathbf{R}$ действительных чисел. Однако в определении кортежа не сказано, что все его элементы обязательно берутся из одного и того же множества. Можно, следовательно, составлять и такие кортежи, первый элемент которых принадлежит одному множеству A_1, второй — другому множеству A_2 и т. д. В связи с этим вводится следующее определение:

Прямым (*декартовым*) *произведением* множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называется множество A таких всевозможных кортежей $<x_1, x_2, ..., x_n>$, что $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_n \in A_n$.

Прямое произведение множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ обозначается символом $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Множества $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *сомножителями* прямого произведения $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Из определения прямого произведения (и определения кортежа) видно, что прямое произведение — в случае различных сомножителей — зависит от их порядка. В частности, если A_1 и A_2 — разные множества, то $A_1 \times A_2$ и $A_2 \times A_1$ не совпадают. Например, если $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1\}$, то $A_1 \times A_2 = \{<1,1>, <2,1>\}$, а $A_2 \times A_1 = \{<1,1>, <1,2>\}$. Таким образом, прямое произведение множеств A_1, A_2 некоммутативно, в отличие от ранее рассмотренного произведения (см. свойство 1, п. 3, § 2).

Множество точек на плоскости можно теперь представить как прямое произведение $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ — множество действительных чисел), а множество точек в пространстве — как $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. В каждом из этих случаев сомножители прямого произведения равны между собой. Используя символику обычной алгебры, множество $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ обозначают $\mathbf{R}^2$, множество $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ — $\mathbf{R}^3$ и т. д. Вообще множество всех кортежей $<x_1, x_2, ..., x_n>$, все элементы которых принадлежат одному и тому же множеству A, обозначают A^n и называют n-й *прямой степенью множества* A.

Вопросы и упражнения

1. Сколько элементов содержит множество $A_1 \times A_2$, если A_1 имеет n элементов, а A_2 — m элементов?

2. Пусть $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 5\}$. Найти $A_1 \times A_2$ и $A_2 \times A_1$. Убедиться, что два последних множества не пересекаются.

3. Пусть $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — дополнения некоторых множеств A и B действительных чисел в множестве $\mathbf{R}$ всех действительных чисел. Доказать, что дополнением множества $A \times B$ в множестве $\mathbf{R}^2$ будет множество $\overline{A} \times \mathbf{R} + \mathbf{R} \times \overline{B}$.

2. Бинарные отношения. Свойства симметричности, рефлексивности и транзитивности. В математике часто приходится иметь дело с так называемыми *отношениями* между элементами того или иного множества. Задание всякого отношения на каком-либо множестве заключается в точном указании того, какие элементы этого множества (взятые в определенном порядке) «состоят» в данном отношении, а какие—нет. Так, можно задать некоторое отношение на множестве **N** натуральных чисел, сказав, что три натуральных числа m, n и p состоят в этом отношении тогда и только тогда, когда $m - n = p$. Это отношение, следовательно, задается множеством S кортежей $<m, n, p>$ из $\mathbf{N}^3 = \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, для которых выполняется условие $m - n = p$. Аналогично этому известное отношение «меньше» на **N** задается множеством S кортежей $<m, n>$ из $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, для которых $m < n$. При этом числа 2 и 7 состоят в отношении «меньше» (кортеж $<2,7> \in S$), а числа 9 и 5 или 7 и 2 не состоят в этом отношении ($<9,5> \notin S$ и $<7,2> \notin S$). Отношение «меньше» является примером отношения, заданного множеством *пар* натуральных чисел. Такое отношение принято называть *бинарным.*

Чтобы дать точное определение бинарного отношения, отметим еще раз, что бинарное отношение на множестве A полностью задается указанием самого множества A и некоторого подмножества S кортежей из $A \times A$. Таким образом, мы приходим к следующему определению:

Бинарным отношением на множестве A называется упорядоченная пара (A, S) множеств A и S, где S есть часть множества $A \times A$. Множество S бинарного отношения (A, S) называется *графиком* этого отношения.

Обычно бинарное отношение обозначают какой-нибудь буквой, например R, или же каким-нибудь специальным знаком, если речь идет о конкретном, введенном в данной теории отношении, например знаком $<$ («меньше»). Про кортежи из S отношения $R = (A, S)$ говорят, что они принадлежат, а про остальные кортежи из $A \times A$— что они не принадлежат отношению R. Принадлежность кортежа $<x, y>$ отношению R записывается в виде $R(x, y)$ или xRy.

В случае, когда бинарное отношение задается на множестве действительных чисел R, множество принадлежащих ему кортежей изображается некоторым множеством точек координатной плоскости. Это дает наглядную геометрическую характеристику соответствующего отношения. Например, множество тех кортежей, для которых выполняется отношение $x < y$, представляется множеством точек плоскости, лежащих н а д прямой $y=x$ (рис. 3, указанная часть плоскости заштрихована). Если отношение $R(x, y)$ состоит в том, что $y = x^2$, то множество принадлежащих ему кортежей изобразится на плоскости точками п а р а б о л ы (рис. 4).

Рассмотрим некоторые важные свойства бинарных отношений.

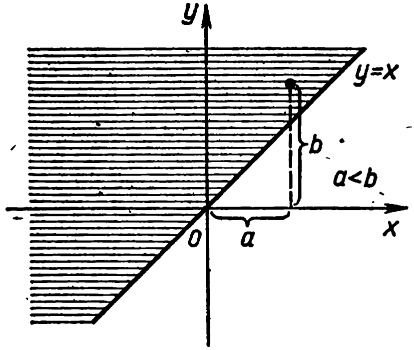


Рис. 3

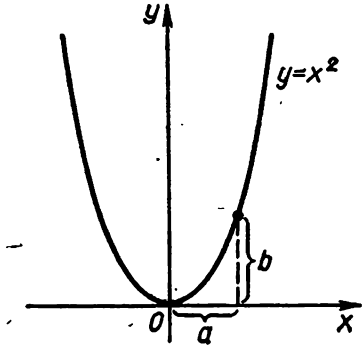


Рис. 4

Отношение называется *симметричным*, если одновременно с каждым кортежем $<a, b>$ ему принадлежит также и кортеж $<b, a>$. Например, отношение $x < -y$ симметрично, а отношение $x < y$ — нет. В случае бинарного отношения, заданного на множестве **R**, свойство симметричности получает наглядное геометрическое выражение: множество принадлежащих симметричному отношению кортежей изображается множеством точек, симметричным относительно прямой $y = x$ (рис. 5).

Отношение называется *рефлексивным*, если ему принадлежат все кортежи вида $<a, a>$. Например, отношение $x < y$ не рефлексивно, однако отношение $x \leqslant y$ будет рефлексивным (поскольку нестрогое неравенство для равных чисел выполняется). Если рефлексивное отношение задано на множестве **R** действительных чисел, то соответствующее множество точек плоскости, изображающее кортежи, которые принадлежат данному отношению, содержит в с е точки прямой $y = x$.

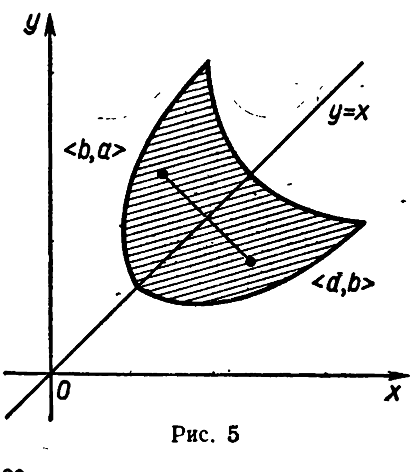


Рис. 5

Отношение называется *транзитивным*, если вместе с любыми кортежами $<a, b>$ и $<b, c>$ ему принадлежит также и кортеж $<a, c>$. Так, для множества M многочленов с целыми коэффициентами отношение делимости многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ будет транзитивным. Другими примерами транзитивных отношений будут: отношение включения (см. с. 8) и отношение «меньше» (если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$).

Вопросы и упражнения

1. Показать, что отношение $P(x, y)$ на множестве $\mathbf{R}$, состоящее в том, что $x + 1 < y$, является транзитивным, но не симметричным и не рефлексивным. Дать геометрическую характеристику этого отношения.

2. Пусть на множестве $\mathbf{R}$ задано бинарное отношение $P(x, y)$, состоящее в том, что $x - 1 < y < x + 1$. Какими из свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности обладает это отношение? Изменится ли ответ, если хотя бы один из знаков $<$ заменить знаком $\leqslant$?

3. Привести три примера бинарных отношений на множестве натуральных чисел, удовлетворяющих поочередно только одному из свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности.

4. Построить бинарное отношение, которое не симметрично, не рефлексивно и не транзитивно.

3. Отношение эквивалентности. Особую роль играют бинарные отношения, которые одновременно являются симметричными, рефлексивными и транзитивными.

Симметричное, рефлексивное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности.*

Для обозначения отношения эквивалентности пользуются обычно символом $\sim$ (читается: «эквивалентно»). Простейшим примером отношения эквивалентности на множестве A может служить отношение тождества или равенства объектов из A, выполняющееся в том единственном случае, когда элементы x и y тождественны (совпадают). Таким образом, отношению тождества принадлежат всевозможные кортежи вида $<x, x>$, и только они. Можно, однако, указать отношение эквивалентности, не являющееся тождеством. Определим, например, бинарное отношение на множестве M многочленов с целыми коэффициентами, считая, что кортежи $<P_n(x), Q_m(x)>$ из $M \times M$ принадлежат данному отношению тогда и только тогда, когда $P_n(1) = Q_m(1)$, т. е. когда совпадают значения многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ при $x = 1$.

Нетрудно убедиться в том, что данное отношение действительно обладает свойствами симметричности, рефлексивности и транзитивности, но в то же время не является отношением тождества. Скажем, кортеж $<-x + 3, x^3 - 6x^2 + 10x - 3>$ принадлежит данному отношению, хотя многочлены $-x + 3$, $x^3 - 6x^2 + 10x - 3$ и не тождественны.

Некоторый общий способ задания отношения эквивалентности на произвольном множестве связан с понятием *разбиения* множества. Будем говорить, что дано разбиение множества A на подмножества (или на *классы*) A_α, если все эти подмножества не пусты, любые два различных подмножества не пересекаются и сумма всех таких подмножеств есть множество A, т. е. $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ (по-прежнему подразумевается, что каждому элементу α некоторого множества I

поставлено в соответствие определенное подмножество A_α множества A). Например, множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ можно разбить на классы $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 5\}$, $A_3 = \{4\}$; множество целых чисел — на классы $A_1 = \{n | n$ — четно), $A_2 = \{n | n$ — нечетно) и т. п. Всякому разбиению множества A на классы A_α отвечает отношение, задаваемое следующим образом: кортеж $<x, y>$ тогда и только тогда принадлежит данному отношению, когда x и y принадлежат одному и тому же классу разбиения. В результате получается отношение эквивалентности, поскольку, как легко проверить, для этого отношения выполняются свойства симметричности, рефлексивности и транзитивности. При этом классы разбиения множества A удовлетворяют двум условиям: 1) любые два элемента одного и того же класса эквивалентны друг другу; 2) никакие два элемента разных классов не эквивалентны между собой. Такие классы называют классами эквивалентности.

Итак, каждое разбиение множества порождает на этом множестве отношение эквивалентности, для которого классы разбиения служат классами эквивалентности. Замечательно, что верно и обратное: по каждому отношению эквивалентности можно указать порождающее его разбиение множества на классы. Именно справедлива следующая

Теорема. *Всякое отношение эквивалентности на множестве A определяет разбиение множества A на классы эквивалентности.*

Доказательство. Каждому элементу x из множества A соотнесем класс A_x всех тех элементов y из A, которые эквивалентны x, т. е. положим $A_x = \{y | y \sim x\}$.

1. Любой класс A_x не пуст, так как по свойству рефлексивности $x \sim x$ и, следовательно, $x \in A_x$.

2. Если $y_1 \in A_x$ и $y_2 \in A_x$, то $y_1 \sim y_2$. Действительно, из условий $y_1 \in A_x$ и $y_2 \in A_x$ следует, что $y_1 \sim x$ и $y_2 \sim x$. По свойству симметричности из $y_2 \sim x$ следует, что $x \sim y_2$. А из условий $y_1 \sim x$ и $x \sim y_2$ по свойству транзитивности получаем, что $y_1 \sim y_2$.

3. Если $x_1 \sim x_2$, то $A_{x_1} = A_{x_2}$. Покажем, например, что (при условии $x_1 \sim x_2$) $A_{x_1} \subset A_{x_2}$. Пусть $y \in A_{x_1}$, т. е. $y \sim x_1$. Из условий $y \sim x_1$ и $x_1 \sim x_2$ по свойству транзитивности получаем, что $y \sim x_2$, т. е. $y \in A_{x_2}$. Таким образом, $A_{x_1} \subset A_{x_2}$. Обратное включение доказывается аналогично.

Из доказанного следует, что если $y \in A_x$, т. е. $y \sim x$, то $A_y = A_x$.

4. Элементы из разных классов не эквивалентны друг другу. Действительно, если бы было $y_1 \sim y_2$, $y_1 \in A_{x_1}$, $y_2 \in A_{x_2}$, то по п. 3 доказательства получилось бы, что $A_{y_1} = A_{x_1}$, $A_{y_2} = A_{x_2}$ и $A_{y_1} = A_{y_2}$ и, следовательно, $A_{x_1} = A_{x_2}$.

5. Разные классы не пересекаются. Действительно, если $y \in A_{x_1}$ и $y \in A_{x_2}$, то по п. 3 $A_y = A_{x_1}$ и $A_y = A_{x_2}$ и, следовательно, $A_{x_1} \neq A_{x_2}$.

6. Непосредственно видно, что $A = \bigcup_{x \in A} A_x$.

Пункты 1, 5 и 6 показывают, что совокупность всех классов A_x образует разбиение множества A, а из п. 2, 4 следует, что классы этого разбиения являются классами эквивалентности. Теорема доказана.

Заметим, что частный случай отношения эквивалентности — отношение равенства — определяет разбиение множества на одноэлементные классы эквивалентности $A_x = \{x\}$, т. е. классов оказывается столько же, сколько элементов содержится в множестве A (каждый элемент из A эквивалентен только самому себе). Другой крайний случай заключается в том, что все элементы A объявляются эквивалентными друг другу, при этом разбиение множества A состоит всего из одного класса — самого множества A. В любом другом случае среди классов разбиения имеется хотя бы один класс, который содержит больше одного элемента и в то же время не совпадает с самим множеством A.

Вопросы и упражнения

1. Показать, что отношение $|x| = |y|$ на множестве $\mathbf{R}$ является отношением эквивалентности. Дать геометрическую характеристику этого отношения.

2. Показать, что отношение $xy \geqslant 0$ на множестве $\mathbf{R}$ не является отношением эквивалентности. Дать геометрическую характеристику этого отношения.

3. Множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ разбито на классы $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{4, 5\}$, $A_4 = \{6, 7, 8, 9\}$. Образовать множество всех кортежей из $A \times A$, которые принадлежат соответствующему отношению эквивалентности.

4. Задано множество кортежей
$\{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>\}$
из $A \times A$, где $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Проверить, что это множество кортежей задает отношение эквивалентности на A, и указать, на какие классы эквивалентности разбивается A.

4. Отношение порядка. Натуральные числа обычно располагают в порядке их возрастания в виде последовательности

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Число m предшествует в этой последовательности числу n (или число n следует за числом m) тогда и только тогда, когда $m < n$. Отношение «меньше», определяющее такой порядок натуральных чисел, обладает следующими свойствами:

1°. Это отношение транзитивно (если $m < n$ и $n < p$, то $m < p$).

2°. Никакие два различных кортежа $<m, n>$ и $<n, m>$ не принадлежат одновременно этому отношению.

3°. Никакой кортеж вида $<m, m>$ не принадлежит этому отношению.

4°. Один из двух различных кортежей $<m, n>$ и $<n, m>$ всегда принадлежит этому отношению.

Вообще, всякое бинарное отношение на множестве A, для которого выполняются свойства 1°—4°, называют *отношением* *простого порядка* (или короче — *отношением порядка*) и обозначают символом $<_A$. При этом говорят, что элемент x предшествует элементу y (или y следует за x), если $x <_A y$, т. е. если кортеж $<x, y>$ принадлежит данному отношению.

Свойство 2° показывает, что никакой элемент не может одновременно предшествовать какому-нибудь другому элементу и следовать за ним, а в силу свойства 4° из любых двух различных элементов один обязательно предшествует другому.

Заметим, что свойство 2° является следствием свойств 1° и 3°: если бы оба кортежа $<m, n>$ и $<n, m>$ принадлежали отношению, то по свойству 1° кортеж $<m, m>$ также принадлежал бы отношению, что противоречит свойству 3°.

Отношение «меньше» на множестве $\mathbf{R}$ всех действительных чисел также является отношением порядка. На множестве $\mathbf{R}$ можно определить и другие отношения порядка. Зададим, например, такое множество K кортежей: $<x, y> \in K$, если $xy \neq 0$ и $x < y$ или если $x \neq 0$ и $y = 0$. Соответствующее бинарное отношение будет отношением порядка; при этом из двух отличных от нуля чисел большее будет следовать за меньшим, а число 0 — за всеми другими числами.

Исходя из отношения порядка на множестве A, нетрудно построить некоторое отношение порядка и на множестве $A^2 = A \times A$. Положим, например, что $<x_1, y_1> <_{A^2} <x_2, y_2>$, если $x_1 <_A x_2$ или если $x_1 = x_2$ и $y_1 <_A y_2$. Легко убедиться, что для нового отношения свойства 1° — 4° по-прежнему выполняются. В частности, отождествляя комплексные числа $x + iy$ с кортежами $<x, y>$, мы таким способом получим по каждому отношению порядка на множестве действительных чисел определенное отношение порядка на множестве комплексных чисел.

Иногда рассматриваются такие отношения со свойствами 1°—3°, для которых свойство 4° не выполняется. Пусть, например, рассматривается множество кортежей $<m, n>$ из $\mathbf{N}^2$, для которых разность $n - m$ является четным положительным числом. Соответствующее бинарное отношение удовлетворяет свойствам 1°—3°, но не свойству 4° (скажем, ни один из кортежей $<0, 1>$, $<1, 0>$ не принадлежит данному отношению). Такие отношения называют *отношениями частичного порядка*. В случае отношения частичного порядка существуют пары различных элементов множества, ни один из которых не предшествует другому. Для сравнения отношений простого и частичного порядка рассмотрим четырехэлементное множество $A = \{a, b, c, d\}$ и множество кортежей $\{<a, b>, <a, c>, <a, d>, <b, c>, <b, d>, <c, d>\}$. Отношение, которому принадлежат в точности все кортежи последнего множества, будет, как нетрудно проверить, отношением простого порядка на A.

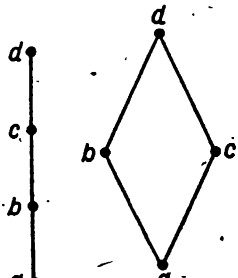


Рис. 6

Если, однако, удалить из этого множества кортежей кортеж $<b, c>$, то мы придем к отношению частичного порядка на A. Эти два отношения схематически представлены на рисунке 6, где элементы A изображены точками, причем $x <_A y$ тогда и только тогда, когда точка x лежит ниже точки y.

Оба рассмотренных отношения называют отношениями *строгого* порядка. Заменив в определениях этих отношений требование 3° требованием рефлексивности (каждый кортеж вида $<x, x>$ принадлежит отношению), мы придем к отношениям *нестрогого* порядка. При этом к множеству кортежей, принадлежащих данному отношению, добавляются все возможные кортежи вида $<x, x>$. Примером отношения нестрогого порядка на множестве **N** натуральных чисел будет отношение $x \leqslant y$. (Вообще отношения нестрогого порядка на множестве A обозначают символом $\leqslant_A$.) Отношение на **N**, выполняющееся, когда x нацело делится на y, является примером отношения нестрогого частичного порядка.

Вопросы и упражнения

1. Задать отношение простого порядка на множестве $\{a, b, c\}$. Сколькими способами это можно сделать?

2. Привести пример такого отношения простого порядка на множестве A, что в A не найдется элемента, предшествующего всем остальным элементам.

5. Отображения и функциональные отношения. Одним из центральных понятий математики является понятие *отображения* (или *функции*). Как известно, функция f считается заданной на множестве A, если всякому элементу x из A сопоставлен один определенный элемент y (обозначаемый через $f(x)$) из некоторого множества B. Таким образом, функцию можно задать, указав три множества: множество A, множество B и множество всех таких кортежей $<x, y>$ из $A \times B$, что y является элементом множества B, сопоставленным элементу x множества A. Принимается поэтому следующее определение:

Отображением (*функцией*) называют тройку множеств (A, B, S), где S есть множество кортежей из $A \times B$ таких, что всякий элемент из A является первым элементом в точности одного кортежа из S.

Множество A называют при этом *областью определения отображения* (A, B, S) (или *множеством отправления* этого отображения), множество B — *областью значений* (*множеством прибытия*), а множество S — *графиком* данного отображения. Например, если функция f каждому x из **R** ставит в соответствие число x^2 из **R**, то график функции состоит из всевозможных кортежей вида $<x, x^2>$ множества $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ и изображается параболой (см. рис. 4, с. 20). Отношение, которому принадлежат в точности все кортежи графика некоторой функции f, называется *функциональным отношением*. Основная особенность этого отношения состоит в том, что ему не могут принадлежать никакие два кортежа $<x, y_1>$, $<x, y_2>$, первые элементы которых равны, а вторые — нет (каждому x

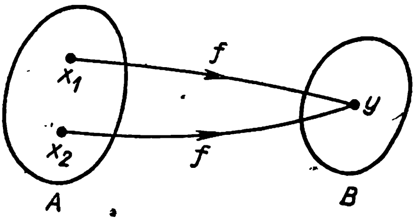


Рис. 7

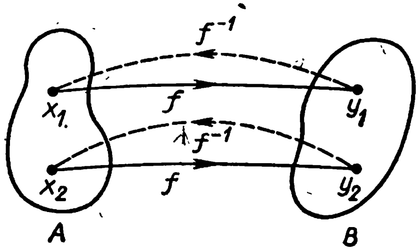


Рис. 8

из A соответствует, по определению функции, в точности один элемент y из B). И обратно, если какое-нибудь отношение удовлетворяет указанному свойству, то оно необходимо является функциональным отношением для некоторой функции f (заданной на множестве A всех первых элементов кортежей).

Приведем некоторые примеры. Множество всех кортежей вида $<x, 1>$ из $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ задает функциональное отношение для функции f, определенной на $\mathbf{R}$ и тождественно равной 1. Множество всех кортежей вида $<x, \sin x>$ задает функциональное отношение для функции, которая каждому числу x ставит в соответствие число $\sin x$. В то же время множество кортежей $\{<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>\}$ не задает никакого функционального отношения, так как содержит разные кортежи с одинаковыми первыми элементами.

Вторые элементы различных кортежей, принадлежащих некоторому функциональному отношению, могут и совпадать (поскольку различным элементам x_1 и x_2 из A функция f может ставить в соответствие о д и н и т о т ж е элемент y из B). Однако случай, когда разным элементам из A ставятся в соответствие разные же элементы из B, представляет особый интерес. В этом случае можно определить так называемую *обратную функцию* f^{-1}, которая каждому значению y функции f из B ставит в соответствие единственный элемент x из A, такой, что $f(x) = y$ (ср. схематические рисунки 7 и 8). Функция f называется при этом *обратимой*, и соответствующее функциональное отношение также естественно называть *обратимым*. Итак, обратимое функциональное отношение характеризуется тем, что всякие два принадлежащих ему кортежа отличаются как первыми, так и вторыми элементами. То же самое можно выразить и иначе: некоторое множество кортежей задает обратимое функциональное отношение, если само это множество и множество кортежей, полученное из него заменой каждого кортежа $<x, y>$ кортежем $<y, x>$, задают функциональные отношения.

До сих пор изучались бинарные или двухместные отношения. Можно, однако, на любом множестве A рассматривать трехместные (тернарные), четырехместные и вообще n-местные отношения. Например, *тернарное* отношение на A задается некоторым множеством кортежей из $A^3 = A \times A \times A$, т. е. множеством всех тех упорядоченных троек из A, для которого оно выполняется. Скажем, на множестве $\mathbf{N}^3$ можно задать подмножество таких троек $<n, m, k>$, для которых $n^m = k$. Этим на множестве $\mathbf{N}$ будет задано некоторое тернарное отношение (оно, например, выполняется для кортежей $<2, 4, 16>$ и $<4, 2, 16>$, но не выполняется для кортежа $<2, 16, 4>$). Аналогично определяются отношения между любым (конечным) числом элементов из A.

Вопросы и упражнения

1. Показать, что отношение простого порядка на множестве, содержащем более двух элементов, не является функциональным отношением.

2. Обратимо ли функциональное отношение, задаваемое всеми кортежами вида $<x, \sin x>$, где $x \in \mathbf{R}$? Изменится ли ответ, если ограничиться числами x между 0 и π? Между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$?

3. Пусть функция f определена на множестве $\{1, 2, 3\}$ так, что $f(x) = (-1)^x$. Найти множество кортежей, принадлежащих соответствующему функциональному отношению, и убедиться, что это отношение необратимо.

§ 4. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ПРЕДИКАТЫ

1. Высказывания. В каждой математической теории изучаются различные утверждения, касающиеся объектов этой теории (целых чисел — в теории чисел, точек и прямых — в планиметрии и т. д.). При помощи тех или иных рассуждений устанавливается справедливость (истинность) одних утверждений об этих объектах и неверность (ложность) других. Собственно говоря, внутреннее содержание любой теории в математике как раз и состоит в доказательстве (т. е. в установлении истинности) или же в опровержении (т. е. в установлении ложности) определенного рода утверждений, относящихся к данной теории.

Итак, в каждой теории выделяется класс утверждений, которые — по законам этой теории — необходимо являются либо истинными, либо ложными. Такие утверждения называются *постоянными высказываниями* (или просто *высказываниями*). Чтобы проиллюстрировать понятие высказывания на примерах, обратимся к теории натуральных чисел.

Рассмотрим следующие утверждения: 1) «$5 + 2 = 7$»; 2) «14 делится на 3»; 3) «$0 \cdot 23 = 1$»; 4) «17 — простое число»; 5) «$3 > 142$». Все эти утверждения являются высказываниями, и законы теории натуральных чисел позволяют установить, что высказывания 1) и 4) являются истинными, а высказывания 2), 3) и 5) — ложными. В качестве еще одного примера возьмем утверждение «$10^{10} + 1$ — простое число». Здесь сразу не удается определить, является это утверждение истинным или ложным. Ясно, однако, что оно либо истинно, либо ложно (т. е. число $10^{10} + 1$ либо делится на меньшее, отличное от единицы число, либо нет) и поэтому также является высказыванием.

Последний пример показывает, что для того, чтобы считать некоторое утверждение высказыванием, вовсе не обязательно знать, каким именно оно является — истинным или ложным. Достаточно только убедиться, что оно обязательно — в принципе — либо истинно, либо ложно. Вопрос же о том, какой из случаев на самом деле имеет место, для каждого отдельного высказывания представляет особую задачу, требующую специального решения.

Например, истинность или ложность высказывания «$10^{10} + 1$ — простое число» можно установить, выполнив конечное (хотя и очень большое) число делений: если число $10^{10} + 1$ делится на одно из чисел 2, 3, ..., 10^{10}, то это высказывание ложно, в противном случае оно истинно. Утверждение «существуют такие положительные целые числа x, y, z, n, что $x^{n+2} + y^{n+2} = z^{n+2}$» также является высказыванием: либо для какой-нибудь четверки чисел x, y, z, n указанное равенство выполняется (утверждение истинно), либо оно не выполняется ни для какой четверки (утверждение ложно). До сих пор, однако, неизвестно, какой из этих случаев имеет место.

Высказывания принято обозначать большими латинскими буквами; значения, которые они могут принимать,— символами 1 (истина) и 0 (ложь). Эти значения называются *значениями истинности* высказывания. Значение истинности высказывания A обозначается через $[A]$. Таким образом, запись $[A] = 0$ служит сокращением фразы «значение высказывания A есть ложь» или «высказывание A ложно».

Вопросы и упражнения

1. Найти значения следующих высказываний: (A) «$42 : 6 = 42$»; (B) «$1123 > 0$»; (C) «существует такое натуральное число x, что $x^2 - 3x + 2 = 0$».

2. То же для высказываний «A и B», «A и C», «B и C».

3. Какие из следующих фраз русского языка являются высказываниями: «два плюс два»; «31 при делении на 6 дает остаток 4»; «5 является корнем уравнения $x^2 - 5x - 100 = 0$»; «числа один, два, шесть и восемь»?

2. Предикаты. Наряду с постоянными высказываниями в математике приходится иметь дело также и с *переменными высказываниями* или так называемыми *предикатами*, значения истинности которых зависят от одного или нескольких переменных и определяются после того, как указаны конкретные значения этих переменных. Возьмем для примера утверждение «x — простое число». Об истинности или ложности этого утверждения нельзя сказать ничего определенного, пока не указано конкретное значение переменного x из натурального ряда. Но если придавать x какие-нибудь определенные натуральные значения, то всякий раз будут получаться вполне определенные постоянные высказывания с определенными значениями истинности: «16 — простое число», «7 — простое число» и т. д. То же самое относится к переменному высказыванию (предикату) «$x > y$», зависящему уже от двух переменных: конкретные натуральные значения каждого из переменных x и y определяют те или иные постоянные высказывания, вроде «$2 > 11$», «$49 > 31$» и т. д. Утверждение «$x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = v$», как легко видеть, представляет собой предикат пяти переменных: x, y, z, u, v.

Вообще будем говорить, что на множестве A задан предикат от переменных x_1, x_2, ..., x_k, если каждому набору значений этих переменных из A поставлено в соответствие определенное значение истинности: 1 (истина) или 0 (ложь). В дальнейшем утверждениями будем называть как постоянные высказывания, так и переменные высказывания (предикаты).

Для обозначения предикатов используют либо большие латинские буквы, либо символы: $A(x, y)$, $B(x)$, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и т. д. (к предикатным символам A, B, P добавляют в скобках символы переменных, от которых зависят данные предикаты). При этом, например, выражение $A(12, 7)$ служит для обозначения (постоянного) высказывания, которое получается, если переменным x и y предиката $A(x, y)$ придать соответственно значения 12 и 7. Некоторые предикаты записывают с помощью тех или иных знаков, имеющих в теории определенный смысл, например: $x = y$, $x > y$, $x + y = z$ и т. д. Предикаты одного переменного называют *одноместными*, двух переменных — *двуместными*; вообще предикаты n переменных называют *n-местными*.

Каждому n-местному предикату $P(x_1, \ldots, x_n)$ из A соответствует множество всех кортежей $<x_1, \ldots, x_n>$ из A^n, для которых этот предикат истинен. Это множество кортежей называется *областью истинности* данного предиката. Например, областью истинности предиката «x — простое число» на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел является множество всех простых чисел, а областью истинности предиката «$x^y = 4$» на том же множестве $\mathbf{N}$ — множество пар $\{<2,2>, <4,1>\}$.

Всякое уравнение (неравенство) с одним переменным является одноместным предикатом, причем его область истинности есть множество его решений. Например, неравенство $x^2 < 6$, рассматриваемое как одноместный предикат на $\mathbf{N}$, имеет в качестве области истинности множество $\{0, 1, 2\}$, состоящее из всех (натуральных) решений данного неравенства. Таким образом, уравнение (неравенство) тогда и только тогда разрешимо, когда область истинности его не пуста, т. е. содержит хотя бы один элемент. С другой стороны, уравнение является *тождеством* на некотором множестве, если его область истинности совпадает с самим этим множеством.

Изучавшееся ранее бинарное отношение на множестве A задавалось некоторым множеством кортежей из A^2. Приняв указанное множество за область истинности двухместного предиката, мы сопоставим каждому бинарному отношению определенный двухместный предикат. Понятно, что справедливо и обратное: область истинности любого двухместного предиката задает некоторое бинарное отношение. В этом смысле каждый двухместный предикат можно понимать как некоторое бинарное отношение.

Вопросы и упражнения

1. Проверить, что для предиката $x^2 - 200x + 12 < 0$ (который для краткости можно обозначить через $A(x)$) выполняется $[A(1)] = 1$, $[A(200)] = 0$. Найти $[A(0)]$, $[A(2)]$, $[A(1000)]$.

2. Привести несколько примеров одноместных и двухместных предикатов.

3. Предикат $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ принимает значение 1 при всех значениях переменного x. Привести пример одноместного предиката, который при всех значениях x принимает значение 0.

§ 5. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И ПРАВИЛА ВЫВОДА

1. Логические операции. Все утверждения какой-либо математической теории строятся из некоторых исходных утверждений данной теории с помощью ряда стандартных *логических операций*. Каждая из этих операций одному или нескольким утверждениям ставит в соответствие новое утверждение с определенным значением истинности.

Операция отрицания. *Отрицанием* утверждения A называется утверждение, которое ложно, если A истинно, и истинно, если A ложно. Отрицание обозначается символом $\overline{A}$ (читается: «не A»).

Операция дизъюнкции. *Дизъюнкцией* утверждений A, B называется утверждение, которое истинно, если истинно хотя бы одно из утверждений A, B, и ложно, когда оба утверждения A, B ложны. Дизъюнкция обозначается символом $A \vee B$ (читается: «A или B»).

Операция конъюнкции. *Конъюнкцией* утверждений A, B называется утверждение, которое истинно, если истинны оба утверждения A, B, и ложно — в противном случае, т. е. когда хотя бы одно из утверждений A, B ложно. Конъюнкция обозначается символом $A \wedge B$ (читается: «A и B»).

Операция импликации. *Импликацией* от утверждения A к утверждению B называется утверждение, которое ложно, когда A истинно, а B ложно, и истинно во всех других случаях. Утверждение A называют *посылкой*, а утверждение B *заключением* импликации. Импликация обозначается символом $A \to B$ (читается: «из A следует B», «A влечет B», «если A, то B»).

Все перечисленные операции удобно характеризовать с помощью таблиц. Например, связь между значением истинности для утверждений A и $\overline{A}$ можно выразить посредством следующей таблицы истинности для отрицания:

$[A]$	$[\overline{A}]$
0	1
1	0

Аналогичные таблицы истинности для дизъюнкции, конъюнкции и импликации можно представить следующим образом:

$[A]$	$[B]$	$[A \vee B]$	$[A \wedge B]$	$[A \to B]$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

(В первых двух столбцах перебираются все возможные наборы значений истинности для утверждений A и B, в последующих столбцах указываются соответствующие значения истинности дизъюнкции $A \vee B$, конъюнкции $A \wedge B$ и импликации $A \to B$.)

Пусть, например, даны высказывания: (A) «6 делится на 3»; (B) «6 делится на 2»; (C) «7 делится на 2». Таким образом, $[A] = [B] = 1$, $[C] = 0$. Отсюда в соответствии с приведенными правилами получаем: $[\overline{A}] = [\overline{B}] = 0$, $[\overline{C}] = 1$, $[A \vee B] = [A \vee C] = [B \vee C] = 1$, $[A \wedge B] = 1$, $[A \wedge C] = [B \wedge C] = 0$, $[A \to B] = [B \to A] = [C \to A] = [C \to B] = 1$, $[A \to C] = [B \to C] = 0$.

Если $A(x)$ означает предикат «x делится на 3», а $B(y)$ — предикат «6 делится на y», то утверждение $A(x) \wedge B(y)$ будет предикатом двух переменных x и y, значение истинности которого зависит от значений этих переменных. Например, при $x = 6$, $y = 2$ данный предикат будет истинным: $[A(6) \wedge B(2)] = 1$, так как $[A(6)] = [B(2)] = 1$.

Операция связывания квантором существования. *Всякому одноместному предикату* $P(x)$ на множестве A ставится в соответствие *высказывание*, обозначаемое символом $\exists x P(x)$ (читается: «существует x такое, что $P(x)$»), которое истинно, если область истинности $P(x)$ непуста, и ложно в противном случае. Знак $\exists$ называется *квантором существования**, а

* Знак $\exists$ происходит от первой буквы английского слова Exist (существовать).

образование высказывания $\exists x P(x)$ из предиката $P(x)$ — *операцией связывания квантором существования* (по переменному x).

Таким образом, высказывание $\exists x P(x)$ истинно тогда и только тогда, когда существует (хотя бы один) элемент a из A, для которого $P(a) = 1$. В частности, в случае предиката $P(x)$, заданного на множестве N натуральных чисел, высказывание $\exists x P(x)$ истинно, если среди высказываний $P(0)$, $P(1)$, ... встречается истинное, и ложно, когда все эти высказывания ложны. Например, предикат $4^x + 1 = 3^x + x^3$ истинен при $x = 2$, откуда следует, что $[\exists x (4^x + 1 = 3^x + x^3)] = 1$. Предикат же $x^2 + 1 = 0$ ложен при любом $x \in \mathbf{N}$, значит, $[\exists x (x^2 + 1 = 0)] = 0$. Вообще если предикат $P(x)$ является уравнением одного переменного на множестве A, то истинность высказывания $\exists x P(x)$ означает разрешимость этого уравнения, т. е. существование у него решения, принадлежащего множеству A.

Операция связывания квантором существования применяется и к предикатам нескольких переменных. Например, для предиката $P(x, y)$ д в у х переменных, заданного на множестве N, утверждение $\exists x P(x, y)$ понимается как предикат о д н о г о переменного y: полагая, скажем, $y = 5$, получим предикат $P(x, 5)$, который зависит т о л ь к о от x, так что значение истинности высказывания $\exists x P(x, 5)$ определяется прежним правилом. Так, например, предикат $\exists x (x^2 y - x + 1 = 0)$ зависит только от y. При $y = 0$ получаем высказывание $\exists x (-x + 1 = 0)$, которое истинно, так как $-1 + 1 = 0$. При $y = 1$ высказывание $\exists x (x^2 - x + 1 = 0)$ ложно, так как п р и в с е х натуральных x равенство $x^2 - x + 1 = 0$ ложно.

Аналогично предикат $\exists x P(x, y, z)$ зависит от двух переменных y и z и т. д.

О п е р а ц и я с в я з ы в а н и я к в а н т о р о м о б щ н о с т и. Всякому *одноместному предикату* $P(x)$ на A ставится в соответствие высказывание, обозначаемое символом $\forall x P(x)$ (читается: «для всех x $P(x)$»), которое истинно, если область истинности предиката $P(x)$ совпадает с A, и ложно в противном случае. Знак $\forall$ называется *квантором общности**, а образование высказывания $\forall x P(x)$ из предиката $P(x)$ — *операцией связывания квантором общности* (по переменному x).

Из определения высказывания $\forall x P(x)$ следует, что оно истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ истинно при всех значениях x из множества A. В частности, для предиката $P(x)$, заданного на множестве N натуральных чисел, высказывание $\forall x P(x)$ истинно, если все высказывания $P(0)$, $P(1)$, ... истинны, и ложно, когда среди этих высказываний встречается (хотя бы одно) ложное. Например, равенство $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ истинно при всех $x \in \mathbf{N}$; значит, $[\forall x (x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2)] = 1$. С другой стороны, высказывание $\forall x (x^2 - 4x + 4 > 0)$ ложно, поскольку предикат $x^2 - 4x + 4 > 0$ ложен при $x = 2$.

Мы видим, таким образом, что тогда как для доказательства истинности высказывания $\forall x P(x)$ требуется убедиться в истинности

* Знак $\forall$ происходит от первой буквы английского слова All (все).

предиката $P(x)$ при всех $x \in A$, для доказательства ложности этого высказывания достаточно указать какой-нибудь один элемент, $a \in A$, для которого $[P(a)] = 0$. Такой элемент a называется *контрпримером* (или *опровергающим примером*) для высказывания $\forall x\, P(x)$. Например, для расcмотренного выше высказывания $\forall x\, (x^2 - 4x + 4) > 0$ число 2 является контрпримером.

Заметим, что если $P(x)$ является равенством с одним переменным x, то истинность высказывания $\forall x\, P(x)$ означает, что равенство является *тождеством*.

Как и в случае квантора существования, операция связывания квантором общности применяется также и к предикатам нескольких переменных. Если, например, $P(x, y)$ есть предикат двух переменных на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел, то предикат $\forall x\, P(x, y)$ есть предикат о д н о г о переменного y, значения истинности которого при $y = 0, 1, 2, \ldots$ определяются как значения истинности соответствующих высказываний $\forall x P(x, 0)$, $\forall x P(x, 1)$, $\forall x P(x, 2)$, ...

Приведенные определения логических операций служат для формального выражения логических связей между различными утверждениями, описываемых обычно некоторыми союзами или словесными сочетаниями. Мы здесь ограничиваемся лишь самими определениями операций, а объяснения, связанные с выбором этих определений, читатель найдет в пункте 4.

Вопросы и упражнения

1. Пусть A, B и C по-прежнему означают высказывания, приведенные в примере на с. 31. Вычислить $[\overline{B} \vee C]$, $[B \wedge \overline{C}]$, $[(A \wedge B) \to C]$, $[C \to \overline{A}]$, $[\overline{A \vee C} \to A]$.

2. Убедиться, что при любых значениях высказываний A и B высказывания $\overline{A \vee B}$ и $\overline{A} \wedge \overline{B}$ принимают одинаковые значения.

В следующих задачах 3—6 предполагается, что все предикаты заданы на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел.

3. Найти $[\exists x\, (2^x = x^2)]$.

4. Найти $[\exists x\, ((y - 2)^2 + x = 0)]$ при $y = 0, 1, 2$. Истинно ли высказывание $\exists y\, (\exists x\, ((y - 2)^2 + x = 0))$?

5. Вычислить $[\forall x\, ((x^2 - 3x + 2 = 0) \to (x \leqslant 2))]$.

6. Существует ли такой предикат $P(x)$, что $[\forall x\, P(x)] = 1$ и $[\exists x\, P(x)] = 0$?

2. Понятие формулы, равносильные формулы, некоторые законы логики. Применяя к каким-либо утверждениям (т. е. высказываниям или предикатам) определенные выше логические операции, мы будем получать некоторые новые утверждения. Так, исходя из высказываний A, B и C можно построить новые высказывания $(A \vee C) \to (A \wedge B)$, $(A \to \overline{C}) \wedge (\overline{A \vee B})$, $((A \wedge B) \wedge C) \to (A \wedge C)$ и т. д. Аналогичным образом из высказывания A и одноместного предиката $P(x)$ получаются высказывания $\exists x\, (A \to P(x))$, $\overline{\forall x\, P(x)} \vee A$, одноместный предикат $(A \to P(x)) \to P(x)$ и различные другие утверждения. Значения истинности всех таких составных утверждений полностью определяются значениями истинности исходных утверждений, из которых они составлены.

Утверждение, получающееся в результате применения логических операций к каким-либо исходным утверждениям, будем называть *логической формулой*, а сами исходные утверждения — *логическими переменными* этой формулы. Например, утверждение $(A \lor C) \to (A \land B)$ является логической формулой, составленной из логических переменных A, B и C. Точно так же утверждение $\exists x\,(A \to P(x))$ является логической формулой с логическими переменными A и $P(x)$.

Рассмотрим сначала формулы, все логические переменные которых являются высказываниями. Такие формулы называются *пропозициональными*. Ясно, что любая пропозициональная формула представляет собой высказывание, значение истинности которого определяется значениями истинности высказываний, являющихся логическими переменными этой формулы. Например, если в формуле $(A \lor C) \to (A \land B)$ выбрать в качестве A истинное высказывание, а в качестве B и C — ложные высказывания, т. е. принять $[A] = 1$, $[B] = [C] = 0$, то будем иметь: $[A \lor C] = 1$, $[A \land B] = 0$ и $[(A \lor C) \to (A \land B)] = 0$. Зависимость между значениями истинности этой формулы и ее логических переменных A, B и C можно представить в виде следующей таблицы истинности данной формулы:

$[A]$	$[B]$	$[C]$	$[(A \lor C) \to (A \land B)]$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Аналогичные таблицы истинности могут быть составлены и для любой другой пропозициональной формулы.

При изучении формул с точки зрения принимаемых ими значений истинности часто удается сложные формулы заменить более простыми с т е м и ж е с а м ы м и истинностными значениями. В связи с этим вводится следующее определение:

Две формулы называются *равносильными*, если они принимают одни и те же значения при одинаковом выборе значений входящих в них переменных.

Например, формула $((A \lor \overline{A}) \land B) \to A$ равносильна формуле $B \to A$, а формула $(A \to C) \land (B \to C)$ равносильна формуле

$(A \vee B) \rightarrow C$. Чтобы доказать эти равносильности, достаточно составить таблицы истинности для каждой пары формул и убедиться в совпадении их значений. Так, для последних двух формул имеем:

$[A]$	$[B]$	$[C]$	$[(A \vee B) \rightarrow C]$	$[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)]$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

Из этого примера видно, что проверку равносильности любых двух пропозициональных формул можно осуществить в конечное число действий: нужно перебрать все возможные сочетания значений переменных, входящих в формулы, и в каждом случае вычислить значения обеих формул. Конечность всей процедуры обеспечивается тем, что любая логическая переменная пропозициональной формулы, будучи высказыванием, может принимать лишь два значения: 1 и 0. Однако определение равносильности распространяется и на формулы, содержащие в числе своих логических переменных какие-нибудь предикаты. А поскольку на любом бесконечном множестве различных предикатов (даже одноместных) существует бесконечно много, то конечный перебор всех значений предикатных логических переменных невозможен. Поэтому доказательство равносильности формул с предикатными переменными представляет собой в каждом случае особую задачу, требующую своего метода.

Докажем в качестве иллюстрации равносильность формул $\overline{\forall x\, P(x)}$ и $\exists x\, \overline{P(x)}$. Очевидно, что при любом выборе (одноместного) предиката $P(x)$ на некотором множестве A каждая из этих формул является высказыванием. Истинность первого из них означает, что $[\forall x\, P(x)] = 0$; следовательно, для некоторого элемента $a \in A$ $[P'(a)] = 0$, откуда $[\overline{P(a)}] = 1$, а это равносильно истинности второго высказывания. Аналогично проверяется, что из условия $[\exists x\, \overline{P(x)}] = 1$ вытекает условие $[\overline{\forall x\, P(x)}] = 1$. Таким образом, формулы $\overline{\forall x\, P(x)}$ и $\exists x\, \overline{P(x)}$ принимают одно и то же значение при любом выборе входящего в них переменного — предиката $P(x)$, т. е. эти формулы равносильны. Точно так же устанавливается равносильность формул $\overline{\exists x\, P(x)}$ и $\forall x\, \overline{P(x)}$.

Читателю рекомендуется доказать в виде упражнения равносильность формул $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ и $\forall x\, (\overline{Q(x)} \rightarrow \overline{P(x)})$.

Для обозначения равносильности формул пользуются знаком $\equiv$, так что рассмотренные выше равносильности записываются в виде:

$(A \vee B) \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C)$, $\overline{\exists x\, P(x)} \equiv \forall x\, \overline{P(x)}$ и т. д.

Отметим здесь, что в математических рассуждениях любые два утверждения взаимозаменяемы, если на языке логики они выражаются равносильными формулами,— этим, в сущности, и определяется значение понятия равносильности. Точное обоснование этого факта связано с характером умозаключений, применяемых в математике, и мы его не приводим.

Среди логических формул особенно важную роль играют так называемые (*тождественно*) *истинные* формулы, а именно формулы, принимающие значение 1 при любом выборе входящих в них логических переменных. Например, тождественно истинной является пропозициональная формула $A \vee \overline{A}$, поскольку, как легко видеть, эта дизъюнкция истинна как при $[A] = 1$, так и при $[A] = 0$.

Истинные логические формулы, как это видно из их определения, истинны в силу самой их ф о р м ы, независимо от конкретного выбора утверждений, из которых они составлены. В этом смысле они представляют собой определенные законы логики. В частности, истинная формула $A \vee \overline{A}$ выражает так называемый *закон исключенного третьего*, который означает, что одно из двух взаимно противоположных утверждений обязательно является истинным.

Заметим, что для выяснения истинности пропозициональной формулы достаточно составить ее таблицу истинности и проверить, всегда ли значение формулы равно 1. Например, таблицы истинности для формул $\overline{A \wedge \overline{A}}$ и $(A \to A) \to A$ имеют вид:

$[A]$	$[\overline{A \wedge \overline{A}}]$	$(A \to A) \to A$
1	1	1
0	1	0

Отсюда следует, что формула $\overline{A \wedge \overline{A}}$ является истинной, а формула $(A \to A) \to A$ не является. Первую из этих формул называют *законом противоречия*, она означает, что два противоположных утверждения не могут быть одновременно истинными.

Рассмотрим еще таблицы истинности для пропозициональных формул $((A \to B) \wedge A) \to B$ и $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$:

$[A]$	$[B]$	$[((A \to B) \wedge A) \to B]$	$[(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})]$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

Таким образом, мы убеждаемся, что обе эти формулы истинны и, следовательно, выражают законы логики. Первый из них означает, что если истинна некоторая импликация и ее посылка, то истинно также и ее заключение; этот закон называется *правилом заключения*. Второй закон, называемый *законом контрапозиции*, означает, что из истинности некоторой импликации и ложности ее заключения вытекает, что посылка этой импликации ложна.

Легко заметить, что проверка истинности пропозициональных формул, как и проверка равносильности двух таких формул, осуществляется по единому правилу и требует конечного числа действий: для каждой формулы составляется таблица истинности, из которой видно, всегда ли формула принимает значение, равное 1. В случае формул с предикатными переменными такая процедура, как уже отмечалось выше, неосуществима, и для каждой формулы приходится подбирать свой метод проверки истинности. Докажем, например, истинность формулы

$$(\forall x A(x)) \to (\exists x\, A(x)),$$

зависящей от одной логической переменной $A(x)$. Покажем, что при любом выборе предиката $A(x)$ данная формула будет истинным высказыванием. Действительно, в противном случае, по определению импликации, получилось бы, что $[\forall x\, A(x)] = 1$ и $[\exists x\, A(x)] = 0$. Тогда, по определению утверждений общности и существования, мы имели бы, что предикат $A(x)$ истинен при каждом x и ложен при каждом x, что невозможно.

Мы привели здесь лишь несколько простейших примеров истинных формул. Список таких примеров легко можно было бы продолжить. Интересно отметить, что в с е истинные формулы могут быть получены из некоторого конечного множества таких формул по определенным правилам.

Вопросы и упражнения

1. Составить таблицу истинности для формулы $A \to ((B \to A) \wedge \overline{B})$.

2. Доказать равносильности $\overline{A} \vee B \equiv A \to B$, $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$, $A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A}$.

3. Проверить, что формулы $A \to B$ и $B \to A$ неравносильны.

4. Убедиться в истинности пропозициональных формул $((A \to B) \wedge (C \to B)) \to ((A \vee C) \to B)$, $A \to (\overline{A} \to B)$.

5. Проверить, что формула $(\overline{A \wedge B}) \to \overline{A}$ не истинна.

3. Необходимые и достаточные условия. Обратная и противоположная теоремы. Многие важные утверждения в математике имеют форму высказывания

$$\forall x\, (P(x) \to Q(x)), \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — одноместные предикаты, заданные на некотором множестве A. Рассмотрим, например, такое высказывание: «Каково бы ни было натуральное число x, из четности числа x следует четность числа x^2»; это высказывание вида (1), в котором одноместные предикаты $P(x)$ и $Q(x)$, заданные на множестве натуральных чисел, означают соответственно: «x — четное число» и «x^2 — четное число».

Заметим, что утверждения, подобные данному, часто формулируют сокращенным образом. Так, в нашем примере могла быть использована следующая сокращенная формулировка: «Квадрат четного числа есть четное число». Однако точное содержание этого утверждения выражается как раз формулой (1).

Приведем еще несколько примеров высказываний в виде (1): «Для любого действительного числа x из неравенства $0 < x < 1$ следует неравенство $0 < x^2 < 1$»; «Если степень многочлена с действительными коэффициентами есть нечетное число, то этот многочлен имеет действительный корень»; «Если натуральное число x простое, то число $3^x + 2$ простое». Можно доказать, что первые два из этих высказываний истинны, а третье ложно: число 5 является для него контрпримером.

В соответствии с определением операции связывания квантором общности установление истинности высказывания (1) заключается в установлении истинности импликации $P(x) \to Q(x)$ для всех $x \in A$, т. е., согласно определению импликации, в доказательстве истинности заключения $Q(x)$ для всех x, при которых посылка $P(x)$ истинна.

Если доказано, что высказывание (1) истинно, то утверждение $P(x)$ называют *достаточным условием* (для) $Q(x)$, а утверждение $Q(x)$ — *необходимым условием* (для) $P(x)$.

Например, известно, что высказывание «Для всякого натурального числа из делимости этого числа на 4 следует его четность» истинно. Оно, очевидно, имеет форму (1): $P(x)$ означает делимость числа x на 4, а $Q(x)$ — четность числа x. Таким образом, делимость числа на 4 является достаточным условием его четности, а четность числа — необходимым условием его делимости на 4. В этом случае используются также следующие две (равноправные) формулировки:

«Чтобы число было четным, достаточно, чтобы оно делилось на 4»;

«Чтобы число делилось на 4, необходимо, чтобы оно было четным».

Рассмотрим наряду с высказыванием (1) высказывание

$$\forall x\,(Q(x) \to P(x)), \tag{2}$$

называемое *обратным* для высказывания (1). Тем самым высказывание (1) оказывается, в свою очередь, обратным для высказывания (2), т. е. высказывания (1) и (2) являются *взаимно обратными*. Истинность одного из них необязательно означает истинность другого. Например, в случае приведенного выше истинного высказывания («Для всякого натурального числа из делимости этого числа на 4 следует его четность») обратным будет высказывание «Для всякого натурального числа из четности этого числа следует его делимость на 4». Это последнее высказывание ложно: контрпримером является число 2.

Если каждое из взаимно обратных высказываний (1) и (2) истинно, то предикаты (или, как говорят, условия) $P(x)$ и $Q(x)$ называются *равносильными*. Нетрудно, например, убедиться, что предикаты «x — четное число» и «x^2 — четное число» равносильны.

В связи с высказыванием (1) рассматривается также высказывание

$$\forall x\,(\overline{P(x)} \to \overline{Q(x)}), \qquad (3)$$

которое называют *противоположным* к высказыванию (1). Легко проверить, что одно из высказываний (1), (3) может быть истинным, а другое — ложным. Например, высказывание «Для всякого натурального числа из того, что это число не делится на 4, следует, что оно нечетно» ложно (контрпример — число 2); в то же время это высказывание является противоположным к рассмотренному выше истинному высказыванию.

Согласно принятым определениям, высказывание

$$\forall x\,(\overline{Q(x)} \to \overline{P(x)}) \qquad (4)$$

будет противоположным к обратному для высказывания (1). Высказывания (1) и (4) либо оба истинны, либо оба ложны, поскольку они выражаются равносильными формулами (см. с. 35). Следовательно, установить истинность высказывания (1) равнозначно тому, чтобы установить истинность высказывания (4). Часто бывает удобно так именно и поступить, т. е. при установлении истинности высказывания (1) заменить это высказывание равносильным ему высказыванием (4). В таком случае говорят, что высказывание (1) доказывается *методом от противного*.

Рассмотрим этот метод более подробно. Пусть установлено, что высказывание (4) истинно. Это, как нам уже известно, означает, что $\overline{P(x)}$ истинно для всякого x, при котором $\overline{Q(x)}$ истинно, т. е., в силу определения операции отрицания, $P(x)$ ложно для всякого x, при котором $Q(x)$ ложно. Чтобы теперь установить истинность высказывания (1), нужно убедиться, что $Q(x)$ истинно для всякого x, при котором $P(x)$ истинно. Допустим противное, т. е. предположим, что для некоторого $x_0 \in A$ $[P(x_0)] = 1$, а $[Q(x_0)] = 0$. В силу истинности импликации (4), из $[Q(x_0)] = 0$ следует, что $[P(x_0)] = 0$. Но это противоречит условию $[P(x_0)] = 1$. Следовательно, наше допущение приводит к противоречию и должно быть отвергнуто, т. е. высказывание (1) истинно.

В основе этого рассуждения лежит следующая схема: если приписав высказыванию A какое-нибудь значение истинности, мы получим, что некоторое высказывание B является и истинным и ложным, то отсюда следует, что высказывание A имеет противоположное значение истинности.

Меняя ролями предикаты $P(x)$ и $Q(x)$, мы видим, что высказывания (2) и (3) также равносильны и, следовательно, взаимозаменяемы при установлении истинности какого-либо из них.

Вопросы и упражнения

1. Указать какое-нибудь достаточное условие для условия: «Число x делится на 5».

2. Указать какое-нибудь необходимое условие для условия: «Натуральное число x является корнем алгебраического уравнения $x^3 + 3x^2 - 3x - 45 = 0$».

3. Показать, что всякий предикат $P(x)$ равносилен самому себе.

4. Доказать, что условие $P(x)$, достаточное для конъюнкции $Q_1(x) \wedge Q_2(x)$, является достаточным для каждого из ее членов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.

5. Даны следующие предикаты на множестве $\mathbf{Z}$ целых чисел:

число x больше числа 4;
число x^2 больше числа 16;
число $2x + 1$ меньше числа 2;
число $|x|$ больше числа 4.

Какие из этих утверждений необходимы для каких-нибудь других, какие — достаточны? Какие из этих утверждений равносильны?

4. Правила вывода. Обоснование формальных определений предыдущего пункта, выяснение смысла введенных логических операций связаны с понятиями *вывода* и *доказательства*.

Всякая математическая теория строится на основе некоторого множества аксиом (утверждений, принимаемых без доказательства), из которых — по определенным правилам — разрешается выводить различные другие утверждения теории. Основываясь на применяемых в математике способах рассуждения, мы сформулируем в этом пункте основные правила вывода, которыми пользуются в процессе математического доказательства.

Предварительно введем некоторые дополнительные обозначения. Буквой Γ будем обозначать какое-нибудь множество утверждений теории, буквой Γ_0 — множество ее аксиом. Выражение Γ, A употребляется для обозначения множества утверждений, состоящего из всех утверждений Γ и утверждения A. Аналогичный смысл приписывается выражениям Γ, A, B; Γ, A, B, C и т. д. Запись $\Gamma \vdash A$ обозначает, что из утверждений Γ (посылок вывода) и аксиом Γ_0 выводимо утверждение A (читается: «из Γ выводимо A»). В частности, запись $\vdash A$ будет означать выводимость A только из аксиом Γ_0, или, как говорят, *доказуемость* A.

а) Общие правила вывода. Прежде всего естественно считать, что все аксиомы доказуемы. Таким образом, первое правило вывода можно сформулировать следующим образом:

I. Если $A \in \Gamma_0$, то $\vdash A$.

Далее, из всякого утверждения A выводимо само это утверждение, т. е.

II. $A \vdash A$.

Понятно также, что если из некоторого множества утверждений Γ выводимо утверждение A, то это утверждение следует считать выводимым и *из более широкого* множества утверждений Γ, B. Иначе говоря, если $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma, B \vdash A$, что можно сокращенно записать так:

$$\text{III.}\quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma,\, B \vdash A}$$

(читается: «Если из Γ выводимо A, то из Γ и B выводимо A»).

Обычно в процессе вывода A из Γ опираются не только на утверждения Γ, но также и на утверждения, выводимость которых из Γ уже установлена. В частности, если из Γ выводится утверждение B, а из Γ и B — утверждение A, то тем самым получается вывод A из Γ. Такое рассуждение можно сокращенно представить в виде следующего правила:

$$\text{IV.}\quad \frac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A}.$$

Дальнейшие правила определяются для каждой из введенных ранее логических операций.

b) П р а в и л а   в ы в о д а   д л я   о т р и ц а н и я. Отрицание A (символически: $\overline{A}$) считается утверждением, противоположным A. При этом утверждения A и $\overline{A}$ понимают обычно как *взаимно* противоположные, и поэтому отрицанию утверждения $\overline{A}$ (т. е. утверждению $\overline{\overline{A}}$) приписывается тот же смысл, что и утверждению A. Утверждения A и $\overline{\overline{A}}$ должны быть, следовательно, равноправны в отношении выводимости. В частности, необходимо принять такое правило:

$$\text{ОТР 1.}\quad \frac{\Gamma \vdash \overline{\overline{A}}}{\Gamma \vdash A}.$$

Что же касается «обратного» правила

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \overline{\overline{A}}},$$

то нет надобности формулировать его отдельно — оно является частным случаем другого правила для отрицания, выражающего уже упоминавшееся выше рассуждение от противного. При доказательстве от противного утверждение считается установленным, если противоположное допущение приводит к противоречию. Более подробно: пусть требуется установить выводимость утверждения A из Γ; допустим противное, т. е. добавим к утверждениям Γ утверждение $\overline{A}$, покажем, что это приводит к противоречию, т. е. что из Γ, $\overline{A}$ можно одновременно вывести некоторое утверждение B и его отрицание $\overline{B}$; следовательно, в условиях Γ утверждение $\overline{A}$ неверно, т. е. из Γ выводимо A. Итак, если $\Gamma, \overline{A} \vdash B$ и $\Gamma, \overline{A} \vdash \overline{B}$, то $\Gamma \vdash A$. Схематически это правило записывается в таком виде:

$$\text{ОТР 2.}\quad \frac{\Gamma, \overline{A} \vdash B \quad \Gamma, \overline{A} \vdash \overline{B}}{\Gamma \vdash A}.$$

c) П р а в и л а   в ы в о д а   д л я   и м п л и к а ц и и. Импликация «из A следует B» (символически: $A \to B$) понимается как утверждение, которое выводимо из аксиом тогда и только тогда, когда B выводимо из аксиом и из A. Вообще выводимость импликации $A \to B$ из Γ понимается как выводимость B из Γ и A. Для импликации принимают поэтому такие правила вывода:

$$\text{ИМП 1.}\quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B};$$

$$\text{ИМП 2.}\quad \frac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, A \vdash B}.$$

d) П р а в и л а   в ы в о д а   д л я   к о н ъ ю н к ц и и. Под конъюнкцией «A и B» (символически: $A \wedge B$) понимается утверждение, выводимость которого равносильна одновременной выводимости утверждений A, B. Таким образом принимаются три правила вывода для конъюнкции:

$$\text{КОН 1. } \frac{\Gamma\vdash A \quad \Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\wedge B};$$

$$\text{КОН 2. } \frac{\Gamma\vdash A\wedge B}{\Gamma\vdash A};$$

$$\text{КОН 3. } \frac{\Gamma\vdash A\wedge B}{\Gamma\vdash B}.$$

e) Правила вывода для дизъюнкции. Дизъюнкции «A или B» (символически: $A\vee B$) приписывается следующий смысл: во-первых, дизъюнкция $A\vee B$ считается выводимой, если выводимо хотя бы одно из утверждений A, B; во-вторых, какое-либо утверждение C считается выводимым из $A\vee B$, если C выводимо порознь из A и из B. Это дает такие правила для дизъюнкции:

$$\text{ДИЗ 1. } \frac{\Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash A\vee B};$$

$$\text{ДИЗ 2. } \frac{\Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\vee B};$$

$$\text{ДИЗ 3. } \frac{\Gamma,\, A\vdash C \quad \Gamma,\, B\vdash C}{\Gamma,\, A\vee B\vdash C}.$$

Формулируя дальнейшие правила *f*) и *g*), будем для конкретности считать, что участвующие в них предикаты заданы на множестве натуральных чисел.

f) Правила вывода для утверждений общности. Утверждению «для всех $x\,P(x)$» (символически: $\forall x\,P(x)$) приписывается следующий смысл: с одной стороны, утверждение $\forall x\,P(x)$ считается выводимым из Γ, если имеется вывод $P(x)$ из Γ, не зависящий от x, т. е. являющийся одновременно выводом $P(0)$ из Γ, $P(1)$ из Γ, $P(2)$ из Γ и т. д. (такой вывод будем обозначать символом $\Gamma \overset{x}{\vdash} P(x)$); с другой стороны, в случае выводимости утверждения $\forall x\,P(x)$ выводимым считается также любое утверждение $P(t)$, которое получается заменой переменного x в $P(x)$ на функцию t, принимающую натуральные значения (например, x^2+3 или $6zy$ или просто число 4 и т. п.). Принимаются, следовательно, такие два правила:

$$\text{ОБЩ 1. } \frac{\Gamma \overset{x}{\vdash} P(x)}{\Gamma\vdash \forall x\,P(x)};$$

$$\text{ОБЩ 2. } \frac{\Gamma\vdash \forall x\,P(x)}{\Gamma\vdash P(t)}.$$

g) Правила вывода для утверждений существования. Утверждение «существует x такое, что $P(x)$» (символически: $\exists x\,P(x)$) понимается следующим образом: с одной стороны, это утверждение считается выводимым, если выводимо утверждение $P(t)$ для некоторой функции t; с другой стороны, утверждение C считается выводимым из $\exists x\,P(x)$, если C выводимо из $P(x)$ независимо от x, т. е. если имеется вывод C из $P(x)$, который является одновременно выводом C из $P(0)$, C из $P(1)$, C из $P(2)$ и т. д. Таким образом, принимаются следующие два правила:

$$\text{СУЩ 1. } \frac{\Gamma\vdash P(t)}{\Gamma\vdash \exists x\,P(x)};$$

$$\text{СУЩ 2. } \frac{\Gamma,\ P(x) \stackrel{x}{\vdash} C}{\Gamma,\ \exists x P(x) \vdash C}.$$

З а м е ч а н и е. При подстановке t вместо x в $P(x)$ следует соблюдать известную осторожность в обозначениях: наличие в $P(x)$ кванторов по переменным, входящим в t, может исказить такую подстановку. Во избежание этого достаточно потребовать, чтобы в t не входили кванторные переменные из $P(x)$. Скажем, в случае правила ОБЩ 2. из того, что выводимым является утверждение $\forall x\, \exists y\, (x + y = x^2 + 2)$, следует выводимость утверждений $\exists y (5 + y = 5^2 + 2)$, $\exists y\, (2z + y = 4z^2 + 2)$, но не утверждения $\exists y\, (y + y = y^2 + 2)$.

Правила вывода $f)$ и $g)$, сформулированные здесь применительно к теории натуральных чисел, с незначительными изменениями распространяются и на любую другую математическую теорию. Замечательно, что в некотором смысле правилами $a)$—$g)$ исчерпываются все применяемые в математике способы рассуждений. Любое математическое доказательство какого-нибудь утверждения можно понимать как построение вывода этого утверждения из аксиом в виде ряда последовательных применений правил $a)$ — $g)$.

В пункте 1 были приведены формальные определения логических операций. Правила вывода $a)$ — $g)$ позволяют дать естественное обоснование этим определениям. Остановимся для примера на определении импликации. Будем называть утверждение A *опровержимым*, если доказуемо его отрицание $\overline{A}$, т. е. если $\overline{A}$ выводимо из аксиом (в принятых обозначениях: $\vdash \overline{A}$). Можно показать, что независимо от выбора аксиом Γ_0 из доказуемости B или опровержимости A вытекает доказуемость импликации $A \to B$, а из опровержимости A и доказуемости B — ее опровержимость. Таким образом, связь между доказуемостью и опровержимостью утверждений A, B и $A \to B$ определяется следующей таблицей:

A	B	$A \to B$
Док	Док	Док
Док	Опр	Опр
Опр	Док	Док
Опр	Опр	Док

Естественно считать все доказуемые утверждения истинными, а все опровержимые утверждения ложными. В этих условиях приведенная таблица полностью определяет таблицу истинности п. 1 для импликации.

Рассмотрим теперь все случаи, перечисленные в таблице. Покажем сначала, что из доказуемости B вытекает доказуемость $A \to B$ (первая и третья строчки таблицы). Пусть $\vdash B$. Тогда по правилу III $A \vdash B$, отсюда по правилу ИМП 1 $\vdash A \to B$. Такое рассуждение можно схематически изобразить в виде фигуры:

$$\begin{array}{ll} \text{III} & \dfrac{\vdash B \text{ (дано)}}{A \vdash B} \\ \text{ИМП 1} & \dfrac{}{\vdash A \to B}. \end{array}$$

Пусть A опровержимо; покажем, что $A \to B$ доказуемо (третья и четвертая строчки таблицы). С одной стороны, из $\vdash \overline{A}$ вытекает $A \vdash \overline{A}$ (правило III) откуда получается $A, \overline{B} \vdash \overline{A}$ (снова правило III). С другой стороны, по правилу II $A \vdash A$, откуда $A, \overline{B} \vdash A$ (правило III). Применяя к выводам $A, \overline{B} \vdash \overline{A}$ и

$A, \bar B\vdash A$ правило ОТР 2, получаем: $A\vdash B$; отсюда $\vdash A\to B$ (правило ИМП 1). Построение вывода $\vdash A\to B$ изображается в виде фигуры:

$$\text{ИМП 1}\;\dfrac{\text{ОТР 2}\;\dfrac{\text{III}\;\dfrac{\text{III}\;\dfrac{\vdash\bar A\ (\text{дано})}{A\vdash \bar A}}{A,\bar B\vdash \bar A}\qquad \text{III}\;\dfrac{A\vdash A\ (\text{II})}{A,\bar B\vdash A}}{A\vdash B}}{\vdash A\to B.}$$

Пусть, наконец, A доказуемо, а B опровержимо; покажем, что $A\to B$ опровержимо (вторая строчка таблицы). Построение вывода $\vdash A\to B$ изобразим следующей фигурой:

$$\text{ОТР 2}\;\dfrac{\text{IV}\;\dfrac{\text{III}\;\dfrac{\vdash A\ (\text{дано})}{\overline{\overline{A\to B}}\vdash A}\qquad \text{ИМП 2}\;\dfrac{\text{ОТР 1}\;\dfrac{\overline{\overline{A\to B}}\vdash\overline{\overline{A\to B}}\ (\text{II})}{\overline{\overline{A\to B}}\vdash A\to B}}{\overline{\overline{A\to B}},\,A\vdash B}}{\overline{\overline{A\to B}}\vdash B}\qquad \text{III}\;\dfrac{\vdash\bar B\ (\text{дано})}{\overline{\overline{A\to B}}\vdash\bar B}}{\vdash\overline{A\to B}}$$

В аналогичном смысле обосновываются определения всех остальных логических операций.

Вернемся далее к вопросу о необходимых и достаточных условиях. В соответствующих определениях мы исходили из истинности высказывания (I) (см. п. 3), не уточняя, однако, как именно эта истинность устанавливается. Будем теперь считать, что истинность равносильна доказуемости. Доказуемость (1) означает, что существует вывод импликации $P(x)\to Q(x)$ из аксиом, н е з а в и с я щ и й от x, т. е. вывод

$$\Gamma_0 \overset{x}{\vdash} P(x)\to Q(x).$$

В силу правил ИМП 1, ИМП 2 такой вывод существует тогда и только тогда, когда существует вывод

$$\Gamma_0,\ P(x)\overset{x}{\vdash} Q(x).$$

Таким образом, условие $P(x)$ является *достаточным* для $Q(x)$, а условие $Q(x)$ — *необходимым* для $P(x)$, если существует не зависящий от x вывод утверждения $Q(x)$ из аксиом Γ_0 и утверждения $P(x)$.

Пусть, например, $P(x)$ означает «число x делится на 3», а $Q(x)$ — «число x^2+x делится на 3». Из $P(x)$ следует, что найдется такое число y, что $x=3y$; тогда $x^2+x=(3y)^2+3y=3(3y^2+y)$; следовательно, существует такое число z (равное $y+3y^2$), что $x^2+x=3z$, а это равносильно утверждению $Q(x)$. Итак, из $P(x)$ (и аксиом арифметики, которыми мы неявно пользовались при выводе равенства $x+x^2=3z$) выводится $Q(x)$. Доказанная теорема означает, что делимость числа x на 3 ($P(x)$) достаточна для делимости числа $x+x^2$ на 3 ($Q(x)$), а делимость числа $x+x^2$ на 3 ($Q(x)$) необходима для делимости числа x на 3 ($P(x)$).

Как уже отмечалось в пункте 3, утверждение (1) может быть истинным, а утверждение (2) — ложным. На языке доказуемости это означает, что для некоторых предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ утверждение (1) выводимо, а утверждение (2) опровержимо.

С другой стороны, истинность одного из утверждений (1) и (4) влечет истинность другого. На языке доказуемости это означает, что по выводу $\Gamma_0\vdash\forall x\,(P(x)\to Q(x))$ всегда можно построить вывод $\Gamma_0\vdash\forall x\,(\overline{Q(x)}\to\overline{P(x)})$, и обратно. Вот, например, как по второму из этих выводов строится первый (достаточно показать, как по выводу $\overset{*}{\vdash}\overline{Q(x)}\to\overline{P(x)}$ строится вывод $\overset{*}{\vdash}P(x)\to Q(x))$:

$$\text{ИМП 2}\ \frac{\vdash\overline{Q(x)}\to\overline{P(x)}\ \text{(дано)}}{}$$

$$\text{III}\ \frac{\overline{Q(x)}\vdash\overline{P(x)}}{} \qquad \text{III}\ \frac{P(x)\vdash P(x)\ \text{(II)}}{}$$

$$\text{ОТР 2}\ \frac{\overline{Q(x)},\ P(x)\vdash\overline{P(x)} \qquad \overline{Q}(x),\ P(x)\vdash P(x)}{}.$$

$$\text{ИМП 1}\ \frac{P(x)\vdash Q(x)}{\vdash(P(x)\to Q(x))}$$

Аналогичным образом по выводу какого-нибудь одного из утверждений (2) или (3) всегда можно построить вывод другого.

§ 6. АКСИОМЫ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА И ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Как и понятие множества вообще, понятие множества натуральных чисел не удается свести к каким-либо другим, более простым известным понятиям. Постараемся вместо этого точно выразить все те свойства, которые мы приписываем последовательности (ряду) натуральных чисел

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ .$$

Заметим, что, за исключением первого члена ряда — числа 0, всякий член этого ряда получается из предыдущего прибавлением единицы. Операцию прибавления единицы будем обозначать символом $'$: $n' = n+1$. Тогда натуральный ряд представится в виде последовательности

$$0,\ 0',\ (0')',\ ((0')')',\ \ldots,$$

или короче:

$$0,\ 0',\ 0'',\ 0''',\ \ldots\ .$$

Операция $'$ (читается: «следующий за») порождает одно за другим все числа натурального ряда, исходя из числа 0. При этом каждое новое порождаемое число отличается от предыдущих (т. е. порожденных до него). Таким образом, для множества натуральных чисел выполняются следующие свойства:

1°. $0 \in \mathbf{N}$.

2°. Если $n \in \mathbf{N}$, то $n' \in \mathbf{N}$.

3°. Множество $\mathbf{N}$ содержит только те элементы, которые принадлежат ему в силу свойств 1°, 2°.

4°. Для любых n и m из $\mathbf{N}$; если $n' = m'$, то $n = m$.

5°. Для любого n из $\mathbf{N}$ $n' \neq 0$.

Первые два свойства означают, что число 0 и все числа, полученные из него последовательным применением операции $'$, являются элементами множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел. Свойство 3° означает, что множество $\mathbf{N}$ никаких других элементов не содержит. Свойства 4°, 5° показывают, что все по порядку порождаемые числа из $\mathbf{N}$ отличны друг от друга. Скажем, не может быть $0''' = 0'''''$, иначе по свойству 4^0 получилось бы последовательно $0'' = 0''''$, $0' = 0'''$, $0 = 0''$, что невозможно в силу свойства 5^0.

Свойства 1^0—5^0 (в несколько иной форме) были предложены итальянским математиком Пеано (1858—1932) в качестве характеристических свойств натурального ряда и получили название *аксиом Пеано.*

Аксиомы Пеано в известном смысле действительно исчерпывающе характеризуют натуральный ряд. А именно пусть в множестве N_1 выделен какой-то элемент (обозначим его символом 0_1) и определена операция (обозначим ее знаком $'^1$), которая каждому элементу из N_1 ставит в соответствие определенный элемент также из N_1. Пусть далее в множестве N_2 выделен элемент 0_2 и определена аналогичная операция $'^2$. Пусть, наконец, аксиомы Пеано выполняются как для множества N_1, элемента 0_1 и операции $'^1$, так и для множества N_2, элемента 0_2 и операции $'^2$. Тогда множества N_1 и N_2 оказываются *подобными* (или, как говорят, *изоморфными*): элементы таких двух множеств можно попарно «связать» таким образом, что «нуль» одного множества будет в паре с «нулем» другого и элементы «следующие за» двумя связанными в пару элементами будут также связаны в пару. Тем самым такие два множества, по существу, совпадают, отличаясь одно от другого лишь индивидуальными обозначениями элементов.

Ввиду подобия любых множеств, удовлетворяющих свойствам 1^0—5^0, принято следующее определение:

Натуральным рядом называется всякое множество, для которого выполняются аксиомы 1^0—5^0.

К утверждениям о натуральных числах применяются все те способы рассуждений, которые указаны в п. 2 § 5. Однако для доказательства утверждений общности вводится специальное правило, называемое *принципом математической индукции.* Этот принцип формулируется следующим образом:

Пусть одноместный предикат $S(x)$ удовлетворяет условиям:

(1) Утверждение $S(0)$ истинно;

(2) Для каждого x из истинности $S(x)$ следует истинность $S(x')$ (т. е. истинно утверждение $\forall x\, (S(x) \to S(x'))$). Тогда утверждение $S(x)$ истинно для любого натурального x, т. е. истинно утверждение $\forall x\, S(x)$.

Убедимся, что условия (1), (2) действительно обеспечивают истинность $S(x)$ для каждого числа натурального ряда $0, 0', 0'', 0''', \ldots$.

Утверждение $S(0)$ истинно в силу (1). В силу (2) из истинности $S(0)$ вытекает истинность $S(0')$. Значит, $S(0')$ истинно. Снова в силу (2) из истинности $S(0')$ следует истинность $S(0'')$. Значит, $S(0'')$ истинно. Продолжая этот процесс, мы докажем истинность $S(0''')$, $S(0'''')$ и т. д. Ввиду аксиомы 3, каково бы ни было натуральное число n. на некотором шаге этого процесса будет доказано, что $S(n)$ истинно.

Принцип математической индукции можно формализовать как дополнительное правило вывода для утверждений о натуральных числах: если из Γ выводимы утверждения $S(0)$ и $\forall x\,(S(x) \to S(x'))$, то считается, что из Γ выводимо утверждение $\forall x\, S(x)$, т. е.

$$\frac{\Gamma \vdash S(0) \quad \Gamma \vdash \forall x\,(S(x) \to S(x'))}{\Gamma \vdash \forall x S(x)}.$$

Если учесть, что вывод утверждения $\forall x\,(S(x) \to S(x'))$ получается из вывода утверждения $S(x) \to S(x')$, не зависящего от x, то правилу индукции можно придать другую форму:

$$\frac{\Gamma \vdash S(0) \quad \Gamma \overset{x}{\vdash} (S(x) \to S(x'))}{\Gamma \vdash \forall x S(x)}.$$

Принимая во внимание, что вывод импликации $A \to B$ из Γ означает вывод B из Γ, A, получим окончательно:

$$\frac{\Gamma \vdash S(0) \quad \Gamma, S(x) \overset{x}{\vdash} S(x')}{\Gamma \vdash \forall x S(x)}.$$

Вывод $\Gamma,\ S(x) \overset{x}{\vdash} S(x')$ не зависит от x в том смысле, что при замене x на 0, 1, 2, ... получаются соответственно выводы $\Gamma,\ S(0) \vdash S(0')$, $\Gamma,\ S(1) \vdash S(1')$, $\Gamma,\ S(2) \vdash S(2')$, ...

Отметим еще случай, когда утверждение $\forall x S(x)$ выводится по индукции только из аксиом (дополнительные посылки Γ отсутствуют). В этом случае мы приходим к следующему правилу:

$$\frac{\vdash S(0) \quad S(x) \overset{x}{\vdash} S(x')}{\vdash \forall x S(x)}.$$

Принята следующая терминология: $S(x)$ называется *предложением индукции*, доказательство истинности $S(0)$ — *базисом индукции*, доказательство истинности утверждения $\forall x\,(S(x) \to S(x'))$ — *шагом индукции*.

Как видно из приведенного правила, принцип математической индукции сводит доказательство любого утверждения общности $\forall x\, S(x)$ к доказательству утверждения общности специального вида $\forall x\,(S(x) \to S(x'))$.

Если доказательство $S(x)$ проводится для всех целых положительных x, т. е. для чисел 1, 2, 3, ..., то базисом индукции считается доказательство истинности утверждения $S(1)$.

Принципом математической индукции в сочетании с правилами *a*)—*g*) исчерпываются все правила вывода, применяемые в аксиоматической арифметике. При аксиоматическом построении арифметики указывается некоторая исходная система утверждений Γ_0 — аксиомы арифметики, а доказуемыми считаются все утверждения, выводимые из Γ_0 по указанным правилам.

Это важное определение доказуемости распространяется (с незначительными изменениями) и на любую другую аксиоматическую теорию. Изучение аксиоматических теорий составляет предмет специальной науки — математической логики.

Глава II

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

§ 1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ГАУССА

1. Обозначения и соглашения. Мы будем рассматривать уравнения первой степени, или, как принято говорить, *линейные уравнения*. Несколько отступая от способа записи, принятого в элементарной алгебре, условимся обозначать неизвестные одной буквой x, но с различными номерами: x_1 — первое неизвестное, x_2 — второе неизвестное и т. д. В таких обозначениях линейное уравнение с n неизвестными запишется в виде:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — фиксированные числа (коэффициенты при неизвестных и свободный член). Не исключается случай, когда все коэффициенты при неизвестных равны нулю, т. е. когда уравнение имеет вид:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b \tag{2}$$

(очевидно, что при $b = 0$ такому «уравнению» удовлетворяет любой набор значений неизвестных, а при $b \neq 0$ не удовлетворяет ни один набор значений).

На всем протяжении этой главы мы будем рассматривать уравнения и неравенства в области действительных чисел. В частности, это означает, что коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений — числа действительные; значения неизвестных тоже предполагаются действительными. На самом деле вся теория, которую мы разовьем здесь для уравнений, остается справедливой и при замене действительных чисел объектами гораздо более общей природы (элементами произвольного «поля»), но об этом пойдет речь после введения понятия поля.

Предметом нашего исследования будет служить не одно отдельное уравнение, а *система* уравнений. Примем следующее соглашение: в i-м уравнении системы коэффициент при неизвестном x_j обозначается a_{ij}, а свободный член — b_i. В таких обозначениях общий вид системы m линейных уравнений с n неизвестными будет:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}. \tag{S}$$

В дальнейшем для краткости будем называть эту систему «системой S».

Решением системы S называется любой упорядоченный набор из n (действительных) чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$$

таких, что если в каждое уравнение системы вместо неизвестных подставить эти числа (имеется в виду подставить α_1 вместо x_1, α_2 вместо x_2 и т. д.), то все уравнения обратятся в тождества.

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Как мы вскоре увидим, для любой системы возможны только три случая:

1) система несовместна;

2) система имеет единственное решение;

3) система имеет бесчисленное множество решений.

Промежуточный случай, когда решений конечное число, притом больше, чем одно, невозможен.

Наша цель будет заключаться в том, чтобы установить, совместна ли данная система уравнений; если система совместна и имеет единственное решение, необходимо найти это решение; в случае бесчисленного множества решений требуется описать их возможно более эффективным способом.

Среди многочисленных методов решения систем линейных уравнений одним из наиболее удобных — как для практических целей, так и для теоретических выводов — является *метод последовательного исключения неизвестных*, или *метод Гаусса*. Ниже будет дано его писание.

2. Элементарные преобразования. В процессе решения системы будем производить над ней элементарные преобразования, понимая под ними любое из следующих действий:

a) вычеркивание уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0; \tag{3}$$

b) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое число c.

Если мы проделаем над системой любое из преобразований a), b), то получится система, *равносильная* исходной. Напомним, что две системы S и S' называются *равносильными*, если каждое решение системы S является также решением системы S' и, обратно, каждое решение системы S' является решением системы S. Другими словами, системы S и S' равносильны, если они имеют *одно и то же множество решений* (в частности, это означает, что если одна из систем несовместна, то несовместна и другая).

То, что преобразование типа a) приводит к равносильной системе, есть факт очевидный. Рассмотрим теперь преобразование типа b). Пусть, например, к обеим частям первого уравнения системы S прибавляются соответствующие части второго уравнения, умноженные на c. В результате получаем новую систему:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}+ca_{21})x_1+(a_{12}+ca_{22})x_2+\dots+(a_{1n}+ca_{2n})x_n=b_1+cb_2 \\ \qquad a_{21}x_1 \qquad\qquad +a_{22}x_2+\dots+ \qquad\qquad a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{m1}x_1+ \qquad\qquad a_{m2}x_2+\dots+ \qquad\qquad a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\}.$$

Нетрудно понять, что каждое решение исходной системы удовлетворяет и новой системе (докажите это строгим рассуждением!). С другой стороны, от новой системы к исходной можно вернуться снова с помощью преобразования типа b); для этого в новой системе следует к обеим частям первого уравнения прибавить соответствующие части второго уравнения, умноженные на $-c$. Отсюда видно, что каждое решение новой системы удовлетворяет исходной. Следовательно, системы равносильны.

Там, где это окажется необходимым, мы будем применять к системе еще одно преобразование, а именно:

c) изменение нумерации неизвестных. Это означает, что каждому неизвестному x_i в системе S присваивается новый номер i' (из того же набора $1, 2, \dots, n$).

Разумеется, система, полученная из S преобразованием c), вообще говоря, не равносильна исходной системе S. Например, если в системе

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1+5x_2-7x_3=-1 \\ 3x_1-\ x_2+6x_3=-1 \end{array}\right\}$$

произвести перенумерацию

$$x_1 \to x_3,\ x_2 \to x_1,\ x_3 \to x_2,$$

то получим систему:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_3+5x_1-7x_2=-1 \\ 3x_3-\ x_1+6x_2=-1 \end{array}\right\},$$

которая не равносильна исходной (исходная система имеет, например, решение $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, но эти значения неизвестных не удовлетворяют новой системе).

Чтобы сохранить единообразие в записях, условимся после каждого преобразования типа c) член с x_1 в любом уравнении писать снова на первом месте, член с x_2 — на втором и т. д. Например, если преобразование c) состоит в том, что вместо x_1 пишется x_3, а вместо x_3 — x_1, в то время как остальные неизвестные сохраняют прежние номера, то в результате такой перенумерации первое уравнение системы примет вид:

$$a_{13}x_1+a_{12}x_2+a_{11}x_3+\dots+a_{1n}x_n=b_1.$$

Если над системой S производится серия элементарных преобразований, и в их числе преобразование с), то полученная система, вообще говоря, не будет равносильна исходной; однако, если вернуть неизвестным их первоначальные номера, то получится система, которая равносильна исходной системе S.

3. Метод Гаусса. Суть метода заключается в том, что при помощи элементарных преобразований данная система приводится к такому виду, из которого все ее решения усматриваются непосредственно. Прежде чем переходить к изложению метода, примем следующее соглашение: если в процессе преобразований системы появляется уравнение (3), то это уравнение отбрасывается (т. е. обязательно производится преобразование а)).

Итак, рассмотрим систему S. Возможны два случая.

1) Среди уравнений системы имеется такое, в котором все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля, т. е. уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, где b — число, отличное от нуля. Ясно, что никакой набор значений $x_1, \ldots, x_n$ такому уравнению удовлетворять не может, поэтому в рассматриваемом случае система несовместна.

2) В каждом уравнении системы хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. Рассмотрим первое уравнение. Если коэффициент a_{11} отличен от нуля, то оставим это уравнение без изменения. Если же $a_{11} = 0$, то какой-либо из остальных коэффициентов не равен нулю, допустим a_{12}. В этом случае мы производим перенумерацию неизвестных (меняем x_1 на x_2 и x_2 на x_1) так, чтобы коэффициент при x_1 в первом уравнении стал не равен нулю. Итак, можем считать $a_{11} \neq 0$.

Исключим теперь x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этой цели из второго уравнения вычтем первое, умноженное на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, затем аналогично поступим с третьим уравнением и т. д. В результате этих преобразований система примет вид:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \boxed{\begin{array}{c} a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{array}} \end{array}\right\},$$

(на самом деле уравнений здесь может оказаться меньше чем m, если придется отбросить уравнения вида (3)). Мы отделили (с помощью рамки) в полученной системе часть, подлежащую дальнейшим преобразованиям,— будем называть ее *остаточной частью* системы.

Применим те же рассуждения к остаточной части. В результате мы или установим, что система несовместна (если имеет место случай 1), или же сделаем следующий шаг — перейдем к системе вида:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2\\ \boxed{\begin{aligned}a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a''_{m3}x_3 + \ldots + a''_{mn}x_n &= b''_m\end{aligned}}\end{aligned}\right\},$$

где $a'_{22} \neq 0$ (быть может, для этого придется сделать дополнительную перенумерацию неизвестных). Здесь остаточная часть системы содержит (по крайней мере) на одно уравнение меньше.

Продолжая этот процесс, мы обязательно придем к одному из двух случаев.

I. Либо после какого-то шага получится система, остаточная часть которой содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, где b — число, не равное нулю. *Тогда исходная система не имеет решений* (несовместна).

II. Либо этого не случится. Тогда, поскольку число шагов не может превысить n (числа неизвестных), мы рано или поздно придем к системе без остаточной части, т. е. к системе вида

$$\left.\begin{aligned}b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1r}x_r + \ldots + b_{1n}x_n &= c_1\\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2r}x_r + \ldots + b_{2n}x_n &= c_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ b_{rr}x_r + \ldots + b_{rn}x_n &= c_r\end{aligned}\right\},$$

где «диагональные» коэффициенты $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$ отличны от нуля. Возможное изменение числа уравнений по сравнению с исходной системой ($r \leqslant m$) связано с тем, что в процессе преобразований отбрасываются уравнения вида (3).

Следующий, последний этап решения призван облегчить нахождение неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Пользуясь тем, что $b_{rr} \neq 0$, и вычитая из 1, 2, ..., $(r-1)$-го уравнений соответствующие кратные r-го уравнения, добиваемся того, чтобы коэффициенты при x_r во всех уравнениях, предшествующих r-му, обратились в нуль. После этого, пользуясь тем, что $b_{r-1,\, r-1} \neq 0$, и вычитая из 1, 2, ..., $(r-2)$-го уравнений соответствующие кратные $(r-1)$-го уравнения, добиваемся того, чтобы коэффициенты при x_{r-1} во всех уравнениях, предшествующих $(r-1)$-му, обратились в нуль. И так далее. В итоге после ряда шагов приходим к системе:

$$\left.\begin{aligned}b_{11}x_1 \qquad\qquad + b'_{1,\, r+1}x_{r+1} + \ldots + b'_{1n}x_n &= c'_1\\ b_{22}x_2 \qquad + b'_{2,\, r+1}x_{r+1} + \ldots + b'_{2n}x_n &= c'_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ b_{rr}x_r + b'_{r,\, r+1}x_{r+1} + \ldots + b'_{rn}x_n &= c'_r\end{aligned}\right\} \text{(система } S'\text{)}.$$

Решить эту систему нетрудно. Рассмотрим два возможных случая.

А. $r = n$. Тогда система S' имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} b_{11}x_1 &= c_1' \\ b_{22}x_2 &= c_2' \\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot \\ b_{nn}x_n &= c_n' \end{aligned}\right\},$$

из которого находятся значения всех неизвестных:

$$x_1 = \frac{c_1'}{b_{11}},\ x_2 = \frac{c_2'}{b_{22}},\ \ldots,\ x_n = \frac{c_n'}{b_{nn}}.$$

Итак, *в случае $r = n$ решение системы единственно.*

В. $r < n$. В этом случае после переноса членов с $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в правые части уравнений и деления их соответственно на b_{11}, $b_{22}, \ldots, b_{rr}$ получаем систему вида:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_1'' + b_{1,\,r+1}''x_{r+1} + \ldots + b_{1n}''\,x_n \\ x_2 &= c_2'' + b_{2,\,r+1}''\,x_{r+1} + \ldots + b_{2n}''\,x_n \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_r &= c_r'' + b_{r,\,r+1}''\,x_{r+1} + \ldots + b_{rn}''\,x_n \end{aligned}\right\}\ (\text{система } S''),$$

которая после возвращения неизвестным их первоначальных номеров равносильна исходной системе S.

Систему S'' можно рассматривать как окончательный итог решения исходной системы S. Она дает в обозримой форме описание всех решений системы S. Неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, стоящие в правых частях, называются *свободными*. Их можно приравнять каким угодно числам и затем из S'' найти значения $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Мы видим, что *в случае $r < n$ система имеет бесчисленное множество решений.*

Еще раз подчеркнем, что если в процессе приведения системы S к виду S'' нам придется делать перенумерацию неизвестных, то систему S'' необходимо исправить, вернув неизвестным их прежние номера. Тогда слева получатся уже не обязательно $x_1, x_2, \ldots, x_r$, а, вообще говоря, какие-то другие r неизвестных. Какие именно, — этот вопрос легко решить, если учесть все произведенные нами перенумерации.

Итог сказанному можно подвести с помощью следующей теоремы.

Теорема. *Если система линейных уравнений совместна, то с помощью элементарных преобразований ее можно привести к системе S' с неравными нулю коэффициентами $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$; в противном случае эти преобразования позволяют получить из системы уравнение вида*

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b, \tag{4}$$

где b — число, отличное от нуля.

В самом деле, если система совместна, то, применяя к ней метод Гаусса, мы никогда не получим уравнения вида (4) (где $b \neq 0$) и, следовательно, процесс решения закончится приведением системы к виду S'; если же система несовместна, то процесс оборвется раньше — получится уравнение вида (4).

Сделаем теперь одно замечание. Практически процесс решения системы S можно облегчить, если вместо преобразований над самой системой производить преобразования над соответствующей таблицей:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \tag{5}$$

в которой записаны коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений. Подобные таблицы, составленные из чисел, называются *матрицами*. Более детальное изучение матриц мы отложим до главы IV, пока же заметим, что написанная выше матрица содержит m строк и n столбцов.

Очевидно, что каждому элементарному преобразованию, производимому над системой S, соответствует некоторое преобразование над матрицей (5), а именно:

преобразованию a)— вычеркивание нулевой строки (т. е. строки, состоящей сплошь из нулей);

преобразованию b)— прибавление к одной строке матрицы (5) другой строки, умноженной на любое число c*;

преобразованию c)— перестановка столбцов.

Эти преобразования над матрицей (5) будем также называть *элементарными*.

4. Примеры. В дальнейших записях принято такое соглашение: знак $\sim$, поставленный между двумя матрицами, означает, что переход от одной матрицы к другой производится при помощи элементарных преобразований над строками (а фактически — над уравнениями системы).

1. Решить систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} -x_1+3x_2+3x_3+2x_4+5x_5=2 \\ -3x_1+5x_2+2x_3+3x_4+4x_5=2 \\ -3x_1+x_2-5x_3-7x_5=-2 \\ -5x_1+7x_2+x_3+16x_4+x_5=10 \end{array}\right\}.$$

Решение. Данной системе соответствует матрица:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 & -2 \\ -5 & 7 & 1 & 16 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

(для удобства столбец свободных членов отделяем вертикальной чертой). Обозначим ее сокращенно A. Имеем:

---

* Это означает, что к каждому числу одной строки прибавляется соответствующее число другой строки, умноженное на c.

$$A\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2\\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 & -4\\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 & -8\\ 0 & -8 & -14 & 6 & -24 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2\\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 12 & -2 & 8\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2\\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 12 & -2 & 8\end{array}\right)\overset{3-5}{\sim}\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 3 & 5 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -4 & -11 & -3 & -7 & -4\\ 0 & 0 & -2 & 12 & 0 & 8\end{array}\right),$$

где знак 3 — 5 над $\sim$ указывает, что произведена перестановка третьего и пятого столбцов (это соответствует перенумерации неизвестных: x_3 заменяется на x_5, а x_5 — на x_3).

Последующие преобразования имеют целью обратить в нуль все числа, расположенные внутри пунктирного треугольника, т. е. стоящие над «диагональными» числами —1, —4, —2. Продолжая преобразовывать матрицу A, получим:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 3 & 5 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -4 & -11 & -3 & -7 & -4\\ 0 & 0 & -2 & 12 & 0 & 8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 3 & 0 & 32 & 3 & 22\\ 0 & -4 & 0 & -69 & -7 & -48\\ 0 & 0 & -2 & 12 & 0 & 8\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 0 & 0 & -\frac{79}{4} & -\frac{9}{4} & -14\\ 0 & -4 & 0 & -69 & -7 & -48\\ 0 & 0 & -2 & 12 & 0 & 8\end{array}\right).$$

Последней матрице отвечает система:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 \qquad\qquad -\frac{79}{4}x_4 - \frac{9}{4}x_5 &= -14\\ -4x_2 \qquad -69x_4 - 7x_5 &= -48\\ -2x_3 + 12x_4 \qquad\qquad &= 8\end{aligned}\right\},$$

если же учесть сделанную нами перенумерацию неизвестных, то придем к системе:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 \qquad\qquad -\frac{79}{4}x_4 - \frac{9}{4}x_3 &= -14\\ -4x_2 \qquad -69x_4 - 7x_3 &= -48\\ -2x_5 + 12x_4 \qquad\qquad &= 8\end{aligned}\right\},$$

которая равносильна исходной. Из последней системы находим:

$$\begin{aligned} x_1 &= 14 - \frac{79}{4}x_4 - \frac{9}{4}x_3,\\ x_2 &= 12 - \frac{69}{4}x_4 - \frac{7}{4}x_3,\\ x_5 &= -4 + 6x_4.\end{aligned}$$

На этом процесс решения исходной системы уравнений заканчивается. Мы получили выражения для неизвестных x_1, x_2, x_5 через

x_4 и x_3; последние играют роль свободных неизвестных, значения которых можно задавать произвольно. Полагая, например, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, получим частное решение:

$$x_1 = 14,\ x_2 = 12,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = -4.$$

2. Решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0\\ 2x_1 - x_2 \qquad - 3x_4 &= 0\\ 3x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 0\\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Данной системе соответствует матрица

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & -3 & 0\\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Удобнее всего начать с перестановки столбцов, например 1-го и 2-го. Итак,

$$A \overset{1-2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{2-3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

В данном случае необходимость в дальнейших преобразованиях отпадает. Действительно, мы получили систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -x_2 + x_3 + 2x_1 - x_4 &= 0\\ -x_3 \qquad - 2x_4 &= 0\\ 3x_1 + 3x_4 &= 0\\ - 3x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(учтены перестановки неизвестных: $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$), из которой последовательным переходом от нижнего уравнения к верхнему находим единственное решение:

$$x_4 = 0,\ x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 = 0.$$

3. Решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= -1\\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 &= 2\\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Выпишем матрицу, соответствующую данной системе:

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Имеем:

$$A \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & 2 \end{array}\right) \overset{2-5}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 10 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Последней строке соответствует уравнение

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = -6$$

(или $0 = -6$), которому не удовлетворяют никакие значения неизвестных. Следовательно, данная система несовместна.

4. Исследовать систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b-1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b-1 \end{array}\right\}$$

при всевозможных значениях параметров a и b.

В данном случае

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{array}\right).$$

Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + 2z = 1 \\ (b-1)y + z = 0 \\ (b+1)z = 2b-2 \end{array}\right\}.$$

Если $a \neq 0$, $b-1 \neq 0$, $b+1 \neq 0$, то система имеет единственное решение. Это решение:

$$z = \frac{2b-2}{b+1}, \quad y = -\frac{2}{b+1}, \quad x = \frac{5-b}{a(b+1)}.$$

Остается рассмотреть случаи, когда $a = 0$, или $b = 1$, или $b = -1$. При $b = -1$ последнее уравнение имеет вид $0 = -4$, откуда видно, что система несовместна. При $b = 1$ имеем:

$$z = 0,$$
$$ax + y = 1,$$

следовательно, x может быть каким угодно числом (свободное неизвестное), $y = 1 - ax$, $z = 0$.

Наконец, при $a = 0$ получаем:

$$\begin{aligned} by + 2z &= 1, \\ (b-1)y + z &= 0, \\ (b+1)z &= 2b-2. \end{aligned}$$

Поскольку случаи $b = -1$ и $b = 1$ уже рассмотрены, то можем считать, что $b \neq -1$, $b \neq 1$. Тогда из третьего и второго уравнений имеем:

$$z = \frac{2b-2}{b+1}, \quad y = \frac{-2}{b+1},$$

а из первого:

$$-\frac{2b}{b+1} + \frac{4b-4}{b+1} = 1,$$

или $b = 5$. Итак, если $a = 0$, $b \neq 1$, $b \neq -1$, то система совместна только при $b = 5$, и в этом случае $z = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, $y = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$, а x — любое число.

Окончательно:

a) если $a \neq 0$, $b \neq 1$, $b \neq -1$ одновременно, то

$$x = \frac{5-b}{a(b+1)}, \quad y = -\frac{2}{b+1}, \quad z = \frac{2(b-1)}{b+1};$$

b) если $b = 1$, то x — любое число, $y = 1 - ax$, $z = 0$;

c) если $a = 0$, $b = 5$, то x — любое число, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{4}{3}$.

Во всех остальных случаях система несовместна (укажите точно эти случаи).

5. Важное замечание к методу Гаусса. Описанный выше способ решения системы методом Гаусса содержит значительный элемент произвола. Произвол вносится на каждом этапе процесса, ибо мы можем исключать по желанию то или другое неизвестное (при условии неравенства нулю соответствующего коэффициента). Кроме того, имеется произвол, обусловленный порядком расположения уравнений в данной системе. Ведь если каким-либо образом переставить уравнения в исходной системе, то процесс последовательного исключения неизвестных будет протекать уже по-другому. В связи с этим возникает важный вопрос: зависит ли число уравнений в окончательном виде системы (т. е. в S'') от того, *как именно* мы применяем к данной системе метод Гаусса? Или, что то же самое: зависит ли число свободных неизвестных (для системы S'' оно равно $n - r$, т. е. разности между числом всех неизвестных и числом уравнений в S'') от конкретного способа приведения системы к виду, подобному S''? Если бы оказалось, что такая зависимость имеется, то это означало бы, что указанные числа характеризуют не столько саму систему, сколько конкретный способ ее решения. Ответ на поставленный вопрос будет дан позже (см. § 7 главы III).

Именно, будет доказано, что, *каким бы способом мы ни приводили систему к виду, подобному S", число уравнений будет получаться каждый раз одно и то же.*

Вопросы и упражнения

1. Что называется решением системы линейных уравнений?

2. Указать все решения уравнения $2x_1 = 3$:

а) если оно рассматривается как уравнение с одним неизвестным x_1;

б) если оно рассматривается как уравнение с n неизвестными

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

3. Какая система уравнений называется совместной? несовместной?

4. В каком случае мы говорим, что две системы уравнений равносильны? Почему две несовместные системы (с одними и теми же неизвестными) равносильны?

5. Какие преобразования над системой уравнений называются элементарными? Какие из них приводят к равносильной системе?

6. Что можно сказать о системе уравнений, если процесс ее решения методом Гаусса обрывается уже после первого шага (т. е. после исключения x_1)?

7. Пусть система несовместна. В чем это проявится при ее решении методом Гаусса?

8. Какие неизвестные называются свободными?

§ 2. СЛЕДСТВИЯ МЕТОДА ГАУССА

1. Условие несовместности системы линейных уравнений. Рассмотрим снова произвольную систему линейных уравнений с n неизвестными. Для удобства ссылок будем ее называть «система S». Умножим обе части первого уравнения системы на какое-либо число k_1, обе части второго — на число k_2 и т. д., затем все полученные уравнения сложим. Мы получим некоторое уравнение, которое называется *линейной комбинацией* уравнений системы S. Например, если дана система:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -5 \\ 3x_1 - 4x_2 &= -7 \end{aligned}\right\},$$

то одна из возможных линейных комбинаций будет

$$3(2x_1 - 3x_2) - 6(3x_1 - 4x_2) = 3(-5) - 6(-7),$$

или, после приведения подобных членов,

$$-12x_1 + 15x_2 = 27.$$

Отметим два очевидных свойства линейных комбинаций.

1°. Любое решение системы S удовлетворяет любому уравнению, являющемуся линейной комбинацией уравнений из S.

2°. Если взять несколько линейных комбинаций уравнений системы S и составить из них, в свою очередь, линейную комбинацию, то полученное уравнение будет снова линейной комбинацией уравнений из S.

Из последнего предложения, в частности, следует, что *любое уравнение, получаемое в процессе решения системы S методом Гаусса, является* (после возвращения неизвестным их первоначальных номеров) *линейной комбинацией уравнений S.*

Может случиться, что некоторая линейная комбинация уравнений системы S представляет собой уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b, \tag{1}$$

где b — число, отличное от нуля. В этом случае система S, очевидно, несовместна. Если же никакая линейная комбинация не представима в виде (1), то система совместна: действительно, решая такую систему методом Гаусса, мы никогда не придем к уравнению вида (1), а это, как мы знаем, гарантирует совместность системы.

Итак, *система несовместна тогда и только тогда, когда некоторая линейная комбинация ее уравнений имеет вид* (1), *где b — число, отличное от нуля.*

Условимся называть уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

противоречивым, если ему не удовлетворяет ни один набор значений неизвестных. Очевидно, любое противоречивое уравнение имеет вид (1), где $b \neq 0$*. Учитывая это, можно сформулировать условие несовместности в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Система линейных уравнений несовместна тогда и только тогда, когда некоторая линейная комбинация ее уравнений есть противоречивое уравнение.*

2. Об уравнениях, являющихся следствиями данной системы. Пусть снова S — некоторая система линейных уравнений с n неизвестными. Предположим, что наряду с системой S задано еще одно уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b. \tag{2}$$

Мы скажем, что уравнение (2) есть *следствие системы S*, если любое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы S удовлетворяет также уравнению (2).

Нас интересует вопрос: как устроены все следствия системы S? Очевидно, если система S не имеет ни одного решения (несовместна), то *любое* уравнение может рассматриваться как ее следствие.

---

* Действительно, если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю, то решение уравнения обязательно существует. Например, если $a_1 \neq 0$, то уравнению удовлетворяют значения неизвестных

$$x_1 = \frac{b}{a_1},\ x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

Поэтому реальный интерес представляет лишь случай, когда система S имеет хотя бы одно решение (совместна). Совершенно ясно, что любое уравнение, являющееся линейной комбинацией уравнений системы S, будет следствием этой системы. Верно ли для совместной системы обратное? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 2. *Если система S совместна, то любое уравнение, являющееся ее следствием, может быть представлено как линейная комбинация уравнений системы.*

Доказательство. Пусть уравнение (2) есть следствие совместной системы S. В предыдущем параграфе с помощью метода Гаусса мы показали, что система S равносильна системе, имеющей (с точностью до изменения нумерации неизвестных) вид:

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}x_1 \qquad\qquad + b'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + b'_{1n}x_n = c'_1 \\ \qquad b_{22}x_2 \qquad + b'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + b'_{2n}x_n = c'_2 \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad\qquad b_{rr}x_r + b'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + b'_{rn}x_n = c'_r \end{array}\right\} \text{(система } S'\text{)},$$

где «диагональные» коэффициенты $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$ отличны от нуля.

Вычтем из уравнения (2) первое уравнение системы S', умноженное на $\frac{a_1}{b_{11}}$, затем второе, умноженное на $\frac{a_2}{b_{22}}$, и т. д., наконец, r-е, умноженное на $\frac{a_r}{b_{rr}}$. Мы получим уравнение вида:

$$a'_{r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_n x_n = b'. \tag{3}$$

Если мы докажем, что на самом деле получится уравнение

$$0 \cdot x_{r+1} + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$$

(или, короче, $0 = 0$), то отсюда будет следовать, что уравнение (2) есть линейная комбинация уравнений S', а значит, и уравнений S (ведь каждое из уравнений S, в свою очередь, является комбинацией уравнений S'). Тем самым теорема будет доказана.

Но уравнение (2) по условию есть следствие системы S, а каждое из уравнений S' также является следствием S. Значит, и уравнение (3) будет следствием S. Однако система S такова, что неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ можно придавать любые значения (это видно из S'). Следовательно, уравнение (3) должно выполняться *для любых значений неизвестных* $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Очевидно, это может быть лишь в том случае, когда все коэффициенты при неизвестных, а также свободный член в этом уравнении равны нулю*. Как было объяснено выше, отсюда следует утверждение теоремы.

---

* В самом деле, поскольку $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0$ есть одно из решений уравнения (3), то $b' = 0$. Столь же легко доказать, что все коэффициенты $a'_{r+1}, \ldots, a'_n$ равны нулю: если бы, например, было $a'_{r+1} \neq 0$, то отсюда следовало бы, что $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0$ не есть решение уравнения (3).

3. Ненулевые решения однородных систем. Как известно, линейное уравнение называется *однородным*, если его свободный член равен нулю. Система, состоящая из однородных уравнений, сама называется *однородной*. Общий вид однородной системы m уравнений с n неизвестными есть

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}. \qquad (4)$$

Нетрудно видеть, что однородная система всегда совместна; действительно, полагая

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots,\ x_n = 0,$$

мы получим, очевидно, одно из решений системы. Это решение называется *нулевым*. Во многих случаях важно знать, имеет ли данная однородная система еще и *ненулевые* решения. Исчерпывающий ответ на этот вопрос будет дан позже, в § 9 гл. III, а сейчас докажем такую теорему.

Теорема. *Однородная система, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, всегда имеет ненулевые решения.*

Доказательство. Применяя к данной системе метод Гаусса, мы никогда не получим уравнения $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$ (ибо свободные члены всех уравнений системы равны нулю). Таким образом, процесс последовательного исключения неизвестных закончится приведением системы к виду S'' § 1 (где все числа $c_1'', \dots, c_r''$ равны нулю). При этом $r < n$, ибо уже в исходной системе число уравнений меньше числа неизвестных. Следовательно, система имеет бесчисленное множество решений, и в том числе, конечно, ненулевые решения.

Доказанная только что теорема получит в дальнейшем важное применение.

К изучению систем линейных уравнений мы еще вернемся в главе III.

Вопросы и упражнения

1. Что называется линейной комбинацией нескольких уравнений?

2. Убедиться в справедливости утверждений 1° и 2° из пункта 1, названных там «очевидными».

3. Какое уравнение называется противоречивым? Какой вид имеет противоречивое уравнение?

4. Сформулировать необходимое и достаточное условие несовместности системы. Почему это условие является необходимым? почему достаточным?

5. Какое уравнение называется следствием данной системы уравнений?

6. Почему, если система уравнений несовместна, любое уравнение (с теми же неизвестными) может считаться ее следствием?

7. Как описываются все уравнения, являющиеся следствиями данной совместной системы?

8. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной?

9. Какое решение системы называется ненулевым?

10. Почему однородная система с числом уравнений, меньшим числа неизвестных, обладает ненулевым решением?

§ 3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. Вступление. *Линейным неравенством* с n неизвестными x_1, x_2, ... , x_n мы будем называть неравенство вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geqslant 0.$$

Теория систем линейных неравенств — небольшой, но важный раздел математики. Его роль особенно возросла с середины 40-х годов нашего столетия, когда возникла новая область прикладной математики — *линейное программирование* — с многочисленными применениями к экономике и технике. В конечном счете линейное программирование — это всего лишь одно из применений теории систем линейных неравенств.

В этом параграфе мы рассмотрим метод решения системы линейных неравенств, основанный на последовательном уменьшении числа неизвестных (нечто вроде метода Гаусса для решения системы линейных уравнений). С помощью этого метода в следующем параграфе будут доказаны теоремы, устанавливающие замечательную *аналогию между свойствами систем линейных неравенств и свойствами систем линейных уравнений.*

Итак, пусть дана система неравенств с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x \ \ + b_m > 0 \end{array}\right\} \text{(система } S\text{)}.$$

Как и в случае уравнений, *решением* системы неравенств называется такой набор значений неизвестных:

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n,$$

для которого выполняется каждое из неравенств этой системы. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*; система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Две системы линейных неравенств с неизвестными x_1, x_2, ... , x_n называются *равносильными*, если каждое решение первой системы является решением второй и, обратно, любое решение второй системы — решением первой (или, выражаясь короче, если обе системы имеют одно и то же множество решений).

2. **Сопутствующая система.** При рассмотрении системы S возникает ряд вопросов: будет ли система совместной; если да, то как найти ее решения; какими особенностями характеризуется строение несовместных систем?

На эти вопросы ответ будет дан частично в этом, частично в следующем параграфе. При этом оказывается весьма полезным связать с каждой системой линейных неравенств новую систему, в которой число неизвестных на единицу меньше, чем в исходной системе,— эту новую систему мы назовем *сопутствующей*.

Перейдем к ее описанию. Рассмотрим любое из неравенств системы S. Оно имеет вид:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a \geqslant 0. \tag{1}$$

Если $a_n = 0$, то оставим это неравенство без изменения. Если $a_n < 0$, то перенесем член a_nx_n в правую часть (с множителем -1) и разделим обе части неравенства на положительное число $-a_n$; получим неравенство вида

$$b_1x_1 + \dots + b_{n-1}x_{n-1} + b \geqslant x_n.$$

В случае $a_n > 0$ перенесем в правую часть неравенства все слагаемые, кроме a_nx_n, и разделим обе части на a_n; получим неравенство

$$x_n \geqslant c_1x_1 + \dots + c_{n-1}x_{n-1} + c.$$

Итак, умножив каждое из неравенств исходной системы на подходящее положительное число, получим *равносильную* ей систему

$$\left.\begin{array}{l}
\boxed{\begin{array}{l} P_1 \geqslant x_n \\ P_2 \geqslant x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_p \geqslant x_n \end{array}} \\[2ex]
\boxed{\begin{array}{l} x_n \geqslant Q_1 \\ x_n \geqslant Q_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n \geqslant Q_q \end{array}} \\[2ex]
\boxed{\begin{array}{l} R_1 \geqslant 0 \\ R_2 \geqslant 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_r \geqslant 0 \end{array}}
\end{array}\right\} \text{(система } T\text{)},$$

где

$$P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_r -$$

выражения вида $b_1x_1 + \dots + b_{n-1}x_{n-1} + b$ (не содержащие x_n).

Разумеется, если в исходной системе S нет ни одного неравенства (1), в котором $a_n < 0$, то в системе T не будет первого блока. Аналогично, если отсутствуют неравенства с $a_n > 0$, то в системе T

не будет второго блока. Наконец, если в S нет неравенств с $a_n = 0$, то в T отсутствует третий блок.

Рассмотрим наряду с системой T следующую систему неравенств с $n - 1$ неизвестными $x_1, \ldots, x_{n-1}$:

$$\left.\begin{matrix} P_\alpha \geqslant Q_\beta \\ R_\gamma \geqslant 0 \end{matrix}\right\} \text{ (система } S'\text{)},$$

где индекс α принимает значения $1, 2, \ldots, p$, индекс β — значения $1, 2, \ldots, q$, а индексу γ — значения $1, 2, \ldots, r$; всего в этой системе $pq + r$ неравенств. Назовем эту систему *сопутствующей* (по отношению к исходной системе S или равносильной ей системе T).

Замечание. Если окажется, что в системе T первый или второй блок отсутствует, то сопутствующая система S' будет состоять только из неравенств $R_\gamma \geqslant 0$. Если в системе T отсутствует третий блок, то в S' будут только неравенства $P_\alpha \geqslant Q_\beta$. Если в T отсутствуют третий и первый блоки или третий и второй, то сопутствующей системы не будет вовсе. Точнее, в этом случае ее следует считать тождественной ($0 \geqslant 0$); решениями такой системы являются *любые* наборы значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. Связь между решениями исходной и сопутствующей систем. Теорема. *Если от любого решения системы S отбросить значение последнего неизвестного x_n, то получим некоторое решение сопутствующей системы S'. Обратно, для любого решения сопутствующей системы S' можно найти такое значение неизвестного x_n, присоединив которое получим решение исходной системы S.*

Первое утверждение теоремы очевидно (если какой-нибудь набор значений неизвестных удовлетворяет системе S, то он удовлетворяет и системе T, но тогда для этого же набора выполняются и все неравенства системы S'). Докажем второе.

Сначала рассмотрим основной случай, когда в системе S' имеется хотя бы одно неравенство $P_\alpha \geqslant Q_\beta$ (см. замечание в конце пункта 2). Пусть $x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}^0$ — какое-нибудь решение системы S'. Подставив указанные значения неизвестных в выражения $P_1, \ldots, P_p, Q_1, \ldots, Q_q, R_1, \ldots, R_r$, получим некоторые числа $P_1^0, \ldots, P_p^0, Q_1^0, \ldots, Q_q^0, R_1^0, \ldots, R_r^0$. Для них должны выполняться неравенства

$$P_\alpha^0 \geqslant Q_\beta^0 \; (\alpha = 1, \ldots, p;\ \beta = 1, \ldots, q)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_\gamma^0 \geqslant 0 \; (\gamma = 1, \ldots, r)$$

Первая группа написанных неравенств — выше пунктирной линии — показывает, что каждое из чисел $Q_1^0, \ldots, Q_q^0$ не больше, чем любое из чисел $P_1^0, \ldots, P_p^0$. Но в таком случае обязательно найдется число x_n^0, которое заключено между всеми числами $Q_1^0, \ldots, Q_q^0$ и всеми числами $P_1^0, \ldots, P_p^0$:

$$P_\alpha^0 \geqslant x_n^0 \geqslant Q_\beta^0,$$

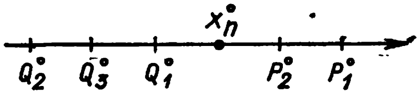


Рис. 9

где α — любое из чисел 1, 2, ... , p, а β — любое из чисел 1, 2, ... , q (рис. 9). Но эти неравенства вместе с неравенствами, записанными ниже пунктирной линии, означают, что набор значений неизвестных

$$x_1 = x_1^0, \ \dots, \ x_{n-1} = x_{n-1}^0, \ x_n = x_n^0$$

является решением системы T, а следовательно, и системы S.

Рассмотрим теперь случай, когда сопутствующая система S' состоит из одних только неравенств $R_\gamma \geqslant 0$. Это означает, что в системе T, исходя из которой построена S', отсутствует первый или второй блок. Предположим, что в T нет первого блока. Тогда, очевидно, в качестве x_n^0 можно взять любое число, удовлетворяющее условиям

$$x_n^0 \geqslant Q_\beta^0$$

(где β — любое из чисел 1, 2, ..., q). Если в T нет второго блока, то x_n^0 выбираем, исходя из условий

$$P_\alpha^0 \geqslant x_n^0$$

(α — любое из чисел 1, 2, ..., p). Наконец, если в T отсутствуют сразу первый и второй блоки, то в качестве x_n^0 можно взять *любое* число. Теорема доказана.

Отметим два важных следствия только что доказанной теоремы.

Следствие 1. *Система S линейных неравенств совместна тогда и только тогда, когда совместна сопутствующая ей система S'.*

Следствие 2. *Все решения исходной системы S могут быть получены следующим способом: нужно к каждому решению $x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ сопутствующей системы S' присоединить любое число x_n^0, которое $\geqslant$ всех чисел $Q_1^0, \dots, Q_q^0$* и $\leqslant$ *всех чисел $P_1^0, \dots, P_p^0$.*

Скажем несколько слов о геометрическом смысле доказанной выше теоремы. Пусть S — система неравенств с *тремя* неизвестными x, y, z. Сопутствующая система S' есть система с двумя неизвестными x, y. Введем в пространстве прямоугольную систему координат и обозначим через K_S множество точек пространства, координаты которых x, y, z удовлетворяют всем неравенствам системы S (множество K_S называется *областью решений* системы S). Аналогично через K'_S обозначим множество точек в плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам системы S' (область решений системы S'). Доказанная теорема в переводе на геометрический язык означает следующее.

Область K'_S есть проекция области K_S на координатную плоскость xOy.

4. Решение системы путем последовательного уменьшения числа неизвестных. Итак, для произвольной системы S линейных неравенств с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ мы построили новую, сопутствующую систему S', в которой неизвестными являются $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Но для системы S' можно, в свою очередь, построить сопутствующую систему S'' (с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$), для последней — сопутствующую систему S''' и т. д. Продолжая этот процесс, мы после ряда шагов придем к системе $S^{(n-1)}$, состоящей из линейных неравенств *с одним неизвестным* x_1. Из следствия 2, установленного в конце предыдущего пункта, вытекает, что система S совместна в том и только в том случае, когда совместна система $S^{(n-1)}$. Но решить вопрос о совместности или несовместности системы с одним неизвестным не составляет никакого труда. Таким образом, мы получаем возможность с помощью весьма простых вычислений узнать, совместна система S или нет.

Допустим, что система совместна. Тогда возникает задача — решить систему или, говоря более подробно, *описать все ее решения* (все наборы значений неизвестных, для которых выполняются неравенства данной системы). В известном смысле эту задачу можно считать решенной, если построены системы $S', S'', \ldots, S^{(n-1)}$. Почему это так, будет сейчас объяснено, а пока введем одно определение.

Набор значений первых k неизвестных

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0$$

называется *допустимым*, если его можно дополнить до некоторого решения исходной системы S, т. е. если существуют такие числа

$$x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0,$$

что набор

$$x_1^0, \ldots, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0$$

является решением системы S.

Как только построены системы S', S'', S''' и т. д., мы получаем возможность:

1) найти все допустимые значения неизвестного x_1 (из системы $S^{(n-1)}$);

2) для любого конкретного допустимого значения x_1^0 найти все совместные с ним значения неизвестного x_2, т. е. такие значения, которые вместе с x_1^0 образуют допустимый набор (они находятся из системы $S^{(n-2)}$);

3) для любого конкретного допустимого набора x_1^0, x_2^0 найти все совместные с ним значения неизвестного x_3 (они находятся путем подстановки x_1^0, x_2^0 в систему $S^{(n-3)}$). И так далее.

Именно в этом смысле и следует понимать наше утверждение, что систему S можно считать решенной, если построены системы $S', S'', \ldots, S^{(n-1)}$.

Пример. Решить систему:

$$\left.\begin{aligned} 7x + 2y - 2z - 4 &\geqslant 0 \\ -x - y - z + 4 &\geqslant 0 \\ -2x + 3y + z - 1 &\geqslant 0 \\ 5x - y + z + 2 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (S)$$

Разрешив каждое неравенство системы относительно z, запишем ее в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{7}{2}x+y-2 &\geqslant z \\ -x-y+4 &\geqslant z \\ z &\geqslant 2x-3y+1 \\ z &\geqslant -5x+y-2 \end{aligned}\right\}. \qquad (T)$$

Сопутствующая система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{7}{2}x+y-2 &\geqslant 2x-3y+1 \\ \frac{7}{2}x+y-2 &\geqslant -5x+y-2 \\ -x-y+4 &\geqslant 2x-3y+1 \\ -x-y+4 &\geqslant -5x+y-2 \end{aligned}\right\} \qquad (S')$$

или, после приведения подобных членов,

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{2}x+4y-3 &\geqslant 0 \\ \frac{17}{2}x &\geqslant 0 \\ -3x+2y+3 &\geqslant 0 \\ 4x-2y+6 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}.$$

Разрешив каждое неравенство относительно y, запишем эту систему в виде:

$$\left.\begin{aligned} y &\geqslant -\frac{3}{8}x+\frac{3}{4} \\ y &\geqslant \frac{3}{2}x-\frac{3}{2} \\ 2x+3 &\geqslant y \\ x &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}; \qquad (T_1)$$

Система, сопутствующая этой, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3 &\geqslant -\frac{3}{8}x+\frac{3}{4} \\ 2x+3 &\geqslant \frac{3}{2}x-\frac{3}{4} \end{aligned}\right\}; \qquad (S'')$$

она равносильна системе:

$$\left.\begin{aligned} x &\geqslant -\frac{18}{19} \\ x &\geqslant -9 \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}\right\},$$

которая в свою очередь равносильна одному неравенству

$$x \geqslant 0. \qquad (T_2)$$

Итак, исходная система совместна. Согласно принятой нами точке зрения, системы (T_2), (T_1), (T) дают решение поставленной задачи. Именно, неравенство (T_2) показывает, что существует решение (x, y, z) исходной системы с любым неотрицательным x. Если выбрано конкретное значение x, то из системы (T_1) можно найти возможные значения для y. Если выбраны конкретные значения x и y, то из системы (T) найдутся возможные значения z. Положим, например, $x = 1$, тогда из системы (T_1) получим следующие неравенства, ограничивающие y:

$$\frac{3}{8} \leqslant y \leqslant 5.$$

Возьмем, например, $y = 4$. Полагая в системе (T) $x = 1$, $y = 4$, получим неравенства, ограничивающие z:

$$\begin{aligned} \frac{11}{2} &\geqslant z \\ -1 &\geqslant z \\ z &\geqslant -9 \\ z &\geqslant -3 \end{aligned}$$

или

$$-3 \leqslant z \leqslant -1.$$

Полагая, например, $z = -2$, получим одно из решений исходной системы: $x = 1$, $y = 4$, $z = -2$.

Вопросы и упражнения

Построив для каждой из данных систем цепочку сопутствующих систем, выяснить, будет ли данная система совместна; в случае совместности указать какое-нибудь частное решение:

а) $\left.\begin{aligned} x - y + 3 &\geqslant 0 \\ 7x + y - 11 &\geqslant 0 \\ 3x + 5y + 9 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$; б) $\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &\geqslant 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\geqslant 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\geqslant -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &\leqslant 5 \end{aligned}\right\}$;

в) $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &\leqslant 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7 \\ x_i \geqslant 0, \ i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}\right\}$.

§ 4. СВОЙСТВА СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. Противоречивое неравенство. Рассмотрим неравенство:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geqslant 0. \qquad (1)$$

Если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля, то написанное неравенство имеет по меньшей мере одно решение. Например, если $a_1 \neq 0$, то, полагая $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, получим неравенство: $a_1x_1 + a \geqslant 0$, которое обязательно имеет решения (в силу условия $a_1 \neq 0$).

Пусть теперь все коэффициенты при неизвестных в неравенстве (1) равны нулю. Тогда неравенство имеет вид:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n + a \geqslant 0. \qquad (2)$$

Если число a неотрицательно, то любой набор значений неизвестных удовлетворяет неравенству (2). Если же a — отрицательное число, то неравенство (2), очевидно, решений не имеет. Условимся называть неравенство вида (2), где a — отрицательное число, *противоречивым*. Из сказанного выше можно сделать такое заключение: *неравенство* (1) *в том и только в том случае не имеет решений, когда оно противоречивое.*

2. Критерий несовместности системы. Рассмотрим теперь систему неравенств

$$\left.\begin{array}{l} L_1 \geqslant 0 \\ L_2 \geqslant 0 \\ \cdots \\ L_m \geqslant 0 \end{array}\right\} \text{(система } S\text{)},$$

где в целях краткости мы обозначили через $L_1, L_2, \ldots, L_m$ выражения вида:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a.$$

Умножим первое из неравенств системы S на неотрицательное число k_1, второе — на неотрицательное число k_2 и т. д., затем все полученные неравенства сложим (почленно). Мы придем к неравенству вида:

$$k_1L_1 + k_2L_2 + \ldots + k_mL_m \geqslant 0,$$

которое называется *линейной комбинацией* неравенств S.

Например, если дана система

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5 \geqslant 0 \\ -3x + 4y - 7 \geqslant 0 \end{array}\right\},$$

то одна из возможных комбинаций будет:

$$3(2x - 3y + 5) + 2(-3x + 4y - 7) \geqslant 0,$$

или, после приведения подобных членов,

$$-y + 1 \geqslant 0.$$

Следующие два предложения очевидным образом вытекают из определения линейной комбинации неравенств.

1. Любое решение системы S удовлетворяет любому неравенству, являющемуся линейной комбинацией неравенств из S.

2. Если взять несколько линейных комбинаций неравенств системы S и составить из них, в свою очередь, линейную комбинацию, то полученное неравенство будет снова линейной комбинацией неравенств из S.

Разумеется, если некоторая линейная комбинация неравенств S представляет собой противоречивое неравенство, то система несовместна. Оказывается, что верно и обратное утверждение, так что в целом справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Система линейных неравенств несовместна тогда и только тогда, когда некоторая линейная комбинация этих неравенств есть противоречивое неравенство.*

Нам осталось доказать ту часть теоремы, которая выражается словами «только тогда». Говоря проще, мы должны доказать, что из неравенств несовместной системы всегда можно скомбинировать противоречивое неравенство.

Для доказательства воспользуемся понятием сопутствующей системы, введенным в предыдущем параграфе. Установим сначала такую лемму.

Л е м м а. *Каждое неравенство сопутствующей системы является линейной комбинацией неравенств исходной системы.*

Доказательство совсем просто. В обозначениях предыдущего параграфа сопутствующая система S' состоит из неравенств

$$P_\alpha \geqslant Q_\beta \quad (\alpha = 1, \ldots, p;\ \beta = 1, \ldots, q) \tag{3}$$

и из неравенств

$$R_\gamma \geqslant 0 \quad (\gamma = 1, \ldots, r). \tag{4}$$

Но неравенство (3) может быть получено путем сложения двух неравенств:

$$P_\alpha \geqslant x_n \text{ и } x_n \geqslant Q_\beta,$$

каждое из которых, в свою очередь, получается из некоторого неравенства исходной системы S умножением обеих его частей на подходящее положительное число. Следовательно, неравенство (3) есть комбинация двух неравенств исходной системы S. Что же касается неравенств (4), то каждое из них само является одним из неравенств системы S. Лемма доказана.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы.

Прежде всего заметим следующее: достаточно проверить справедливость теоремы для систем с одним неизвестным. В самом деле, пусть S — несовместная система линейных неравенств с n неизвестными. Построим для нее сопутствующую систему S', для последней — сопутствующую систему S'' и т. д. Получим цепочку систем:

$$S,\ S',\ S'',\ \ldots,\ S^{(n-1)},$$

где $S^{(n-1)}$ есть система с одним неизвестным x_1. Воспользуемся теперь следующим предложением, установленным в пункте 3 предыдущего параграфа: система линейных неравенств совместна тогда и только тогда, когда совместна сопутствующая ей система. Отсюда вытекает, что если несовместна система S, то будет несовместна и система $S^{(n-1)}$. Из допущения, что доказываемая нами теорема справедлива для систем с одним неизвестным, будет следовать, что некоторая линейная комбинация неравенств системы $S^{(n-1)}$ есть противоречивое неравенство. Но из доказанной выше леммы следует, что каждое неравенство системы $S^{(n-1)}$ есть комбинация неравенств исходной системы S. Следовательно, некоторая комбинация неравенств системы S есть противоречивое неравенство.

Итак, осталось проверить справедливость теоремы для систем линейных неравенств с одним неизвестным.

Пусть дана несовместная система

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1 \geqslant 0 \\ a_2x+b_2 \geqslant 0 \\ \cdots\cdots \\ a_mx+b_m \geqslant 0 \end{array}\right\}. \tag{5}$$

Можно предположить, что в этой системе отсутствуют неравенства вида $0 \cdot x + b \geqslant 0$, где b — неотрицательное число (такие неравенства можно просто отбросить).

Далее, можно считать, что все коэффициенты при x отличны от нуля; в противном случае в систему (5) с самого начала входило бы неравенство $0 \cdot x + b \geqslant 0$, где b — отрицательное число, т. е. противоречивое неравенство.

Итак, будем считать, что ни одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ не равно нулю. Легко видеть, что среди этих чисел обязательно должны быть как положительные, так и отрицательные: в самом деле, если бы указанные числа имели один и тот же знак, например, были бы положительны, то система (5) приводилась бы к виду

$$\left.\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{b_1}{a_1} \\ x \geqslant -\dfrac{b_2}{a_2} \\ \cdots\cdots \\ x \geqslant -\dfrac{b_m}{a_m} \end{array}\right\}$$

и, следовательно, была бы совместной.

Предположим, для определенности, что первые k из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ положительные, а остальные $m-k$ отрицательные. Тогда система (5) равносильна системе:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{b_1}{a_1} \\ \cdots\cdots \\ x \geqslant -\dfrac{b_k}{a_k} \end{array}} \\ \\ \boxed{\begin{array}{l} x \leqslant -\dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}} \\ \cdots\cdots \\ x \leqslant -\dfrac{b_m}{a_m} \end{array}} \end{array}\right\}. \tag{6}$$

Множество решений этой системы есть промежуток

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta,$$

где α — наибольшее из чисел $-\frac{b_1}{a_1}, \ldots, -\frac{b_k}{a_k}$, а β — наименьшее из чисел $-\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}, \ldots, -\frac{b_m}{a_m}$. Поэтому несовместность системы означает, что $\alpha > \beta$. Пусть, например, $\alpha = -\frac{b_1}{a_1}$, а $\beta = -\frac{b_m}{a_m}$. Тогда имеем:

$$-\frac{b_1}{a_1} > -\frac{b_m}{a_m},$$

откуда вытекает

$$b_m a_1 - b_1 a_m < 0 \tag{7}$$

(следует учесть, что $a_1 > 0$ и $a_m < 0$). Если теперь первое из неравенств (5) умножить на положительное число $-a_m$, а последнее на положительное число a_1 и затем произвести сложение, то получится линейная комбинация вида:

$$0 \cdot x + (b_m a_1 - b_1 a_m) \geqslant 0;$$

это неравенство в силу (7) является противоречивым.

Итак, для систем с одним неизвестным теорема справедлива. В силу сделанного ранее замечания отсюда вытекает справедливость теоремы для произвольных систем.

Доказанная выше теорема — лишь одно из проявлений аналогии, которая существует между свойствами систем линейных неравенств и свойствами систем линейных уравнений. Заменяя в ней слово «неравенство» словом «уравнение», получим следующее предложение.

Система линейных уравнений несовместна тогда и только тогда, когда некоторая линейная комбинация этих уравнений есть противоречивое уравнение.

Как мы знаем (§ 2), это предложение *тоже справедливо*. Следует только иметь в виду, что линейная комбинация уравнений — это сумма данных уравнений, умноженных на *какие угодно* (а не только неотрицательные, как в случае неравенств) числа.

3. Частный случай. Особо важным является один частный случай теоремы о несовместных системах неравенств, а именно — когда в состав данной системы с n неизвестными входят неравенства

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \quad (\text{система } S_1).$$

Обозначив остальную часть системы через S_2, можно сказать, что задача состоит в отыскании всех *неотрицательных* (т. е. удовлетворяющих системе S_1) решений системы S_2. Если эта задача не имеет решений, то согласно доказанной выше теореме некоторая линейная комбинация неравенств системы S_2:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a \geqslant 0, \tag{8}$$

в сумме с некоторой комбинацией неравенств S_1:

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n \geqslant 0$$

($k_1, k_2, \ldots, k_n$ неотрицательны), дает противоречивое неравенство

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n + b \geqslant 0,$$

где b — отрицательное число. Следовательно,

$$a_1 = -k_1 \leqslant 0,\ a_2 = -k_2 \leqslant 0, \ldots, a_n = -k_n \leqslant 0,\ a < 0.$$

Сформулируем полученный результат в виде отдельного предложения.

Если система линейных неравенств не имеет неотрицательных решений, то некоторая линейная комбинация этих неравенств есть неравенство вида (8), *где все коэффициенты* $a_1, a_2, \ldots, a_n \leqslant 0$, *а свободный член* $a < 0$.

4. О следствиях совместной системы. Дальнейшая аналогия между свойствами систем линейных неравенств и свойствами систем линейных уравнений проявляется в вопросе о *следствиях системы.*

Как и в случае уравнений, мы говорим, что данное неравенство есть следствие системы неравенств S, если любое решение системы S удовлетворяет и данному неравенству. В § 2 мы доказали следующую теорему: если система линейных уравнений совместна, то любое уравнение, являющееся ее следствием, может быть представлено как линейная комбинация уравнений системы. Очевидно, мы не можем ожидать, чтобы то же самое было верно для систем неравенств, ибо, например, следствием системы

$$x_1 + 3x_2 + 1 \geqslant 0 \tag{9}$$

(состоящей из одного неравенства) является неравенство

$$x_1 + 3x_2 + 2 \geqslant 0,$$

которое никак не может быть представлено в виде линейной комбинации неравенства (9). Однако если ограничиться рассмотрением *однородных* линейных неравенств, т. е. неравенств вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant 0$$

(свободный член равен нулю), то приведенная выше теорема оказывается все же справедливой и в случае неравенств.

Теорема. *Пусть S — совместная система однородных линейных неравенств. Тогда любое однородное неравенство, являющееся следствием системы S, может быть представлено как линейная комбинация неравенств S.*

Доказательство. В целях краткости запишем систему S в виде

$$\left.\begin{array}{l} L_1 \geqslant 0 \\ L_2 \geqslant 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L_m \geqslant 0 \end{array}\right\} \text{(система } S\text{)},$$

где каждое $L_i (i = 1, 2, ..., m)$ есть выражение вида

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n.$$

Пусть неравенство

$$L \geqslant 0$$

(где L есть также выражение указанного выше вида) является следствием системы S. Если c — положительное число, то неравенство (строгое)

$$L + c > 0 \qquad (10)$$

будет и подавно следствием S. Рассмотрим противоположное ему неравенство

$$L + c \leqslant 0,$$

или

$$-L - c \geqslant 0. \qquad (11)$$

Поскольку неравенство (10) есть следствие системы S, то противоположное неравенство (11), напротив, несовместно с S. Другими словами, система, состоящая из S и неравенства (11):

$$\left.\begin{array}{r} L_1 \geqslant 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L_m \geqslant 0 \\ -L - c \geqslant 0 \end{array}\right\}, \qquad (12)$$

несовместна.

По теореме о несовместных системах отсюда следует, что из неравенств (12) можно скомбинировать противоречивое неравенство. Говоря более подробно, можно найти такие неотрицательные числа $k_1, ..., k_m$ и k, что неравенство

$$k_1L_1 + ... + k_mL_m + k(-L - c) \geqslant 0 \qquad (13)$$

будет противоречивым; это, в свою очередь, означает, что левая часть неравенства (13) после приведения подобных членов принимает вид

$$0 \cdot x_1 + ... + 0 \cdot x_n + c', \qquad (14)$$

где c' — некоторое отрицательное число.

Легко видеть, что число k, фигурирующее в (13), должно быть отлично от нуля, в противном случае вместо (13) мы имели бы

$$k_1L_1 + ... + k_mL_m \geqslant 0,$$

но такое неравенство не может быть противоречивым, поскольку система S предполагается совместной.

Из равенства

$$k_1L_1 + ... + k_mL_m + k(-L - c) = 0 \cdot x_1 + ... + \\ + 0 \cdot x_n + c'$$

в силу $k \neq 0$ следует, что

$$L = \frac{k_1}{k}L_1 + ... + \frac{k_m}{k}L_m - \frac{c'}{k} - c.$$

Так как $L_1, L_2, \ldots, L_m, L$ — однородные выражения (без свободных членов), то из последнего равенства должно следовать

$$\frac{c'}{k} - c = 0.$$

Значит,

$$L = \frac{k_1}{k} L_1 + \ldots + \frac{k_m}{k} L_m,$$

и тем самым неравенство $L \geqslant 0$ является линейной комбинацией неравенств $L_1 \geqslant 0, \ldots, L_m \geqslant 0$. Теорема доказана.

Если несколько расширить понятие линейной комбинации неравенств, то доказанная выше теорема будет справедлива и в общем случае (т. е. для неоднородных неравенств). А именно мы скажем, что неравенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a + c \geqslant 0$$

является *ослабленной линейной комбинацией неравенств* данной системы S, если c — неотрицательное число, а неравенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geqslant 0$$

есть линейная комбинация неравенств системы S.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. *Если система S линейных неравенств совместна, то любое неравенство, являющееся ее следствием, может быть представлено как ослабленная линейная комбинация неравенств системы S.*

К вопросу о системах линейных неравенств мы вернемся в конце следующей главы.

Вопросы и упражнения

1. Какое неравенство называется противоречивым? Какой вид имеет противоречивое неравенство?

2. Что называется линейной комбинацией нескольких неравенств? Почему при составлении линейной комбинации нужно умножать данные неравенства на неотрицательные числа?

3. Проверьте справедливость утверждений 1 и 2 из пункта 2 § 4, названных там «очевидными».

4. При доказательстве теоремы о несовместных системах мы строим цепочку сопутствующих систем $S', S'', \ldots, S^{(n-1)}$. Не может ли случиться, что эта цепочка оборвется раньше, чем мы придем к $S^{(n-1)}$ (т. е. получится система S^k, $k < n - 1$, являющаяся тождественной)?

Глава III

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ

§ 1. АРИФМЕТИЧЕСКОЕ n-МЕРНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО $\mathbf{R}^n$

Каждому уравнению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

отвечает кортеж

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, b).$$

Решая систему уравнений методом Гаусса, мы оперировали, по существу, не столько самими уравнениями, сколько соответствующими кортежами. Поэтому кажется целесообразным изучать кортежи, составленные из чисел, как самостоятельные объекты. Определив естественные операции над такими объектами, мы построим весьма содержательную теорию, после чего (уже на более глубокой основе) вновь вернемся к изучению систем линейных уравнений или линейных неравенств.

1. Операции над кортежами. Пусть n — фиксированное натуральное число. Мы будем рассматривать множество $\mathbf{R}^n$ — декартово произведение множества $\mathbf{R}$ действительных чисел самого на себя n раз. Элементами множества $\mathbf{R}^n$ являются всевозможные кортежи

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные числа (координаты данного кортежа). Два кортежа считаются *равными* в том и только в том случае, когда равны их соответствующие координаты:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

Для сокращенного обозначения кортежей будем пользоваться полужирным шрифтом. Равенство кортежей будем записывать обычным образом: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

До сих пор нам не приходилось производить над кортежами какие-либо специальные действия. Теперь мы определим для кортежей две операции, которые назовем соответственно *сложением кортежей* и *умножением кортежа на число.*

Операция сложения кортежей определяется естественным способом: если

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

то

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Таким образом, сложение кортежей сводится к сложению их соответствующих координат.

Столь же естественно определяется произведение кортежа a на число k:

$$ka = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n).$$

Легко видеть, что операция сложения кортежей обладает переместительным и сочетательным свойствами:

$$a + b = b + a,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Так же легко проверяются и формулы:

$$(k + l)\, a = ka + la,\ k\,(a + b) = ka + kb,$$
$$k\,(la) = (kl)\, a.$$

Кортеж, все координаты которого равны нулю, называется *нулевым кортежем* и обозначается 0. Таким образом,

$$0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

Очевидно, что для любого кортежа a

$$a + 0 = a.$$

2. Арифметическое n-мерное векторное пространство.

Примем такое определение.

Множество $\mathbf{R}^n$, снабженное указанными выше (см. пункт 1) операциями сложения кортежей и умножения кортежа на число, называется *арифметическим n-мерным векторным пространством*, а его элементы (т. е. кортежи) называются *арифметическими векторами*.

Чтобы не вводить новых символов, мы будем обозначать n-мерное арифметическое векторное пространство снова символом $\mathbf{R}^n$. Слово «арифметический» будем, как правило, опускать и говорить просто «n-мерное векторное пространство» или даже «пространство $\mathbf{R}^n$». Точно так же вместо слов «арифметический вектор» будем говорить просто «вектор». Итак, векторы — это кортежи

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

рассматриваемые как элементы пространства $\mathbf{R}^n$.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *координатами* вектора a.

Причина, по которой мы называем кортеж a «вектором», становится понятной, если вспомнить известные факты из аналитической геометрии: если в обычном пространстве введена декартова система координат, то каждому вектору a можно сопоставить набор из трех чисел a_1, a_2, a_3 — координат данного вектора. При этом сложение векторов и умножение векторов на числа записываются в координатах с помощью равенств

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \quad ka = (ka_1, ka_2, ka_3),$$

что согласуется с данным выше определением операций над векторами из $\mathbf{R}^n$.

Вводя определение арифметического вектора, мы делаем по сравнению с аналитической геометрией известный шаг вперед: снимаем ограничение на число координат. Разумеется, непосредственное геометрическое истолкование допускают только векторы пространств $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$. Векторы из $\mathbf{R}^1$ можно отождествить с обычными векторами на прямой, выходящими из фиксированной точки O, векторы $\mathbf{R}^2$ — с обычными векторами на плоскости, имеющими фиксированное начало O, наконец, векторы из $\mathbf{R}^3$ — с обычными векторами в пространстве, отложенными от одной точки O.

Следует учесть, что любые два вектора на прямой, получающиеся один из другого параллельным переносом, имеют одинаковые координаты. В силу этого каждому арифметическому вектору из $\mathbf{R}^1$ отвечает не один, а бесчисленное множество векторов на прямой. Чтобы обеспечить взаимно однозначное соответствие между элементами из $\mathbf{R}^1$ и векторами на прямой, можно условиться (как это сделано выше) рассматривать только такие векторы на прямой, начало которых находится в фиксированной точке O.

Аналогичное замечание относится к соответствию между элементами из $\mathbf{R}^2$ и векторами на плоскости, а также между элементами из $\mathbf{R}^3$ и векторами в трехмерном пространстве.

В этой главе при рассмотрении векторов будет предполагаться, что их *координаты — действительные числа*. Позже будет рассмотрен более общий случай, когда координаты векторов представляют собой элементы из произвольного «поля». С этой, более общей точки зрения рассматриваемые в данной главе векторы являются векторами над «полем» действительных чисел. Впрочем, все результаты, которые будут получены для векторов с действительными координатами, остаются в силе и для векторов с координатами из любого «поля».

§ 2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

1. Линейная комбинация нескольких векторов. Обычно при исследовании какого-либо вопроса приходится иметь дело не с одним отдельным вектором, а с целым множеством, или, как принято говорить, с *системой векторов* (принадлежащих одному и тому же пространству $\mathbf{R}^n$). Если система состоит из конечного числа векторов, то их обозначают, как правило, одной и той же буквой с различными индексами. Например,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (\ \ 1, 0, 3, -2), \\ \boldsymbol{a}_2 &= (-1, 1, 4, \ \ 3), \\ \boldsymbol{a}_3 &= (-5, 3, 5, \ \ 3) \end{aligned}$$

— система трех векторов, принадлежащих пространству $\mathbf{R}^4$.

Пусть

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$$

— какая-либо конечная система векторов. Возьмем совершенно произвольные числа

$$k_1, k_2, \dots, k_m$$

и составим вектор

$$\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + k_m\boldsymbol{a}_m.$$

Любой вектор $\boldsymbol{a}$ такого вида называется *линейной комбинацией* данных векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$, а числа $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$ — *коэффициентами* этой линейной комбинации.

Пример. Найти линейную комбинацию

$$2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$$

векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ из вышеприведенного примера.

Складывая векторы

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{a}_1 &= (\ \ 2, \ \ 0, \ \ 6, -4), \\ -3\boldsymbol{a}_2 &= (\ \ 3, -3, -12, -9), \\ \boldsymbol{a}_3 &= (-5, \ \ 3, \ \ 5, \ \ 3), \end{aligned}$$

получаем

$$2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = (0, 0, -1, -10).$$

Если вектор $\boldsymbol{a}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$, то говорят, что $\boldsymbol{a}$ *линейно выражается через* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ или же что $\boldsymbol{a}$ *разлагается по векторам* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$.

Сформулируем одно очевидное предложение, которое в дальнейшем будет часто использоваться: если вектор $\boldsymbol{a}$ линейно выражается через $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$, а каждый из этих векторов, в свою очередь, линейно выражается через $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$, то вектор $\boldsymbol{a}$ линейно выражается через $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$.

2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Введем чрезвычайно важное понятие *линейной зависимости*. Говорят, что векторы

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m \qquad (1)$$

линейно зависимы или что они *образуют линейно зависимую систему*, если среди них имеется такой вектор, который линейно выражается через остальные. В противном случае, т. е. если ни один из данных векторов не может быть представлен как линейная комбинация остальных, говорят, что векторы (1) *линейно независимы* или что они *образуют линейно независимую систему*.

Подчеркнем, что понятия линейной зависимости и линейной независимости применяются лишь к системам, состоящим из *конечного* числа векторов.

Пример. Система

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (\ \ 1, 2), \\ \boldsymbol{a}_2 &= (-2, 1), \\ \boldsymbol{a}_3 &= (\ \ 0, 5) \end{aligned}$$

линейно зависима, так как $\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$.

Данное выше определение относится, строго говоря, к системам, состоящим более чем из одного вектора. В случае, если система состоит из *единственного* вектора, условимся считать ее линейно зависимой только тогда, когда этот вектор является *нулевым*.

Вообще говоря, установить линейную зависимость (или линейную независимость) системы векторов не так просто. Однако если система содержит только два вектора, то вопрос о ее линейной зависимости решается легко. В самом деле, линейная зависимость системы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ означает, что один из данных векторов, допустим $\boldsymbol{a}_1$, может быть представлен как линейная комбинация другого, т. е.

$$\boldsymbol{a}_1 = k\boldsymbol{a}_2.$$

Два вектора, связанные такой зависимостью, называются *пропорциональными*. Таким образом, *система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы пропорциональны.*

Замечание. Следует отчетливо понимать, что линейная зависимость между векторами (1) вовсе не означает, что *каждый* из этих векторов разлагается по остальным. В определении говорится лишь о том, *что хотя бы один* из данных векторов должен линейно выражаться через остальные. Что это не одно и то же, показывает следующий пример.

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два непропорциональных вектора. Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

Поскольку $\boldsymbol{a}_2 = 1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_3$, то система линейно зависима. В то же время вектор $\boldsymbol{a}_3$ не допускает разложения по $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$; действительно, равенство $\boldsymbol{a}_3 = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2$ означало бы, что вектор $\boldsymbol{b}$ пропорционален $\boldsymbol{a}$, вопреки условию.

3. Второе определение линейной зависимости. Определение линейной зависимости можно сформулировать и в другой, эквивалентной форме, которая часто оказывается более удобной. Согласно этому второму определению, система векторов (1) называется линейно зависимой, если существуют такие числа $c_1, c_2, \ldots, c_m$, *не равные одновременно нулю*, что

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_m\boldsymbol{a}_m = 0. \tag{2}$$

Таким образом, линейная зависимость системы (1) означает, что некоторая линейная комбинация векторов (1) с коэффициентами, не равными одновременно нулю, представляет собой нулевой вектор.

Докажем, что оба определения линейной зависимости эквивалентны.

В случае, когда система состоит из единственного вектора $\boldsymbol{a}_1$, ее линейная зависимость в новом смысле означает, что при некотором $c_1 \neq 0$ имеет место равенство $c_1\boldsymbol{a}_1 = 0$, т. е. что вектор $\boldsymbol{a}_1$ нулевой. Таким образом, для системы, состоящей из одного вектора, оба определения линейной зависимости означают одно и то же.

Предположим теперь, что в системе (1) более одного вектора.

Пусть система линейно зависима в первоначальном смысле, т. е. один из векторов, скажем $\boldsymbol{a}_1$, является линейной комбинацией остальных:

$$\boldsymbol{a}_1 = k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства вектор $-\boldsymbol{a}_1$, получим:

$$0 = -\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m,$$

т. е. соотношение вида (2), где $c_1 = -1$ (и тем самым $c_1 \neq 0$). Отсюда следует, что система (1) линейно зависима в смысле второго определения.

Обратно, предположим, что система (1) линейно зависима во втором смысле, т. е. справедливо равенство (2), где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — некоторые числа, среди которых имеются отличные от нуля. Пусть, для определенности, $c_1 \neq 0$. Тогда, записав равенство (2) в виде

$$c_1\boldsymbol{a}_1 = -c_2\boldsymbol{a}_2 - \ldots - c_m\boldsymbol{a}_m$$

и разделив обе части на c_1, получим:

$$\boldsymbol{a}_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \left(-\frac{c_m}{c_1}\right)\boldsymbol{a}_m.$$

Последнее равенство показывает, что вектор $\boldsymbol{a}_1$ есть линейная комбинация остальных векторов системы (1), т. е. что эта система линейно зависима в первом смысле.

Итак, мы установили полную эквивалентность обоих определений линейной зависимости.

4. Примеры задач на линейную зависимость

Пример 1. Выяснить, будет ли линейно зависимой система векторов:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= (\ \ 1, 2, \ \ 3, \ \ 0),\\
\boldsymbol{a}_2 &= (-1, 0, \ \ 3, -2),\\
\boldsymbol{a}_3 &= (\ \ 2, 5, -2, \ \ 3),\\
\boldsymbol{a}_4 &= (\ \ 4, 12, \ \ 2, \ \ 1).
\end{aligned}$$

Согласно второму определению линейной зависимости задача сводится к тому, чтобы выяснить, будет ли уравнение

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = 0 \qquad (3)$$

иметь хотя бы одно ненулевое решение.

Поскольку равенство двух векторов означает равенство их одноименных координат, то вместо одного векторного уравнения (3) можем записать четыре числовых:

$$\begin{aligned}
1x_1 + (-1)x_2 &+ \quad 2x_3 + \ \ 4x_4 = 0,\\
2x_1 + 0\cdot x_2 &+ \quad 5x_3 + 12x_4 = 0,\\
3x_1 + \quad 3x_2 &+ (-2)x_3 + \ \ 2x_4 = 0,\\
0\cdot x_1 + (-2)x_2 &+ \quad 3x_3 + \ \ 1x_4 = 0.
\end{aligned}$$

Это однородная система четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Решив ее методом Гаусса, получим, что единственное решение есть (0, 0, 0, 0). Следовательно, система $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ линейно независима.

Пример 2. Дана система векторов:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= (\;\;1,\;\;1,\;\;4,\;\;2),\\
\boldsymbol{a}_2 &= (\;\;1, -1, -2,\;\;4),\\
\boldsymbol{a}_3 &= (\;\;0,\;\;2,\;\;6, -2),\\
\boldsymbol{a}_4 &= (-3, -1,\;\;3,\;\;4),\\
\boldsymbol{a}_5 &= (-1,\;\;0, -4, -7).
\end{aligned}$$

Установить: а) будет ли данная система линейно зависима; б) какие именно линейные зависимости, т. е. соотношения вида

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 + x_5\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

где числа $x_1, \ldots, x_5$ не равны нулю одновременно, имеются в данной системе?

Будем искать ответ на второй вопрос; это позволит нам ответить также на первый.

Итак, решаем векторное уравнение (4). В координатной записи оно равносильно системе уравнений:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \qquad\;\; - 3x_4 - x_5 &= 0,\\
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad\;\; &= 0,\\
4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0,\\
2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Проведя необходимые вычисления, найдем, что общее решение этой системы есть

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{7}{6}x_5 - x_3,\\
x_2 &= \frac{5}{6}x_5 + x_3,\\
x_4 &= \frac{1}{3}x_5,
\end{aligned} \tag{5}$$

где x_3, x_5 — свободные неизвестные.

Формулы (5) дают, в сущности, ответ на поставленный вопрос. Из них следует, что любое соотношение (4) приводится к виду:

$$\left(\frac{7}{6}x_5 - x_3\right)\boldsymbol{a}_1 + \left(\frac{5}{6}x_5 + x_3\right)\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + \frac{1}{3}x_5\boldsymbol{a}_4 + x_5\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{0},$$

причем не все коэффициенты равны нулю, если числа x_3, x_5 не равны оба нулю. Отсюда вытекает, в частности, линейная зависимость системы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_5$. Полагая, например, $x_3 = 1$, $x_5 = 0$, находим одну из зависимостей между данными векторами:

$$-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}.$$

5. Простейшие свойства линейной зависимости. Докажем несколько предложений о линейной зависимости.

1. *Если среди векторов системы имеется нулевой вектор, то система линейно зависима.*

Это предложение почти очевидно. В самом деле, предположим, для определенности, что в системе (1) первый вектор нулевой. Тогда очевидное равенство

$$0 = 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_3 + \dots + 0 \cdot \boldsymbol{a}_m$$

показывает, что вектор $\boldsymbol{a}_1$ есть линейная комбинация остальных векторов, т. е. что система (1) линейно зависима.

2. *Если часть системы линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

Действительно, пусть часть системы (1), состоящая, для определенности, из первых k векторов ($k < m$), линейно зависима. Это означает, что существуют числа $c_1, c_2, \dots, c_k$, не равные одновременно нулю, такие, что

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k = 0.$$

Тогда

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k + 0 \cdot \boldsymbol{a}_{k+1} + \dots + 0 \cdot \boldsymbol{a}_m = 0,$$

т. е. вся система (1) линейно зависима.

3. *Если система* (1) *линейно независима, но при добавлении к ней еще одного вектора* $\boldsymbol{a}$ *становится линейно зависимой, то вектор* $\boldsymbol{a}$ *линейно выражается через векторы* (1).

В самом деле, линейная зависимость системы $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}$ означает наличие равенства

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + c_m\boldsymbol{a}_m + c\boldsymbol{a} = 0, \tag{6}$$

где среди чисел $c_1, c_2, \dots, c_m, c$ имеются не равные нулю. Заметим, что коэффициент при $\boldsymbol{a}$ в написанном равенстве отличен от нуля; в противном случае это равенство означало бы линейную зависимость системы (1). Пользуясь тем, что $c \neq 0$, можно из равенства (6) выразить вектор $\boldsymbol{a}$ линейно через $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$.

Следующее предложение относится к системе специального вида, а именно к системе:

$$\left.\begin{array}{lcl}
\boldsymbol{a}_1 & = & (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r}, \dots, a_{1n}) \\
\boldsymbol{a}_2 & = & (0, a_{22}, \dots, a_{2r}, \dots, a_{2n}) \\
\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\boldsymbol{a}_r & = & (0, 0, \dots, a_{rr}, \dots, a_{rn})
\end{array}\right\} \tag{7}$$

Здесь все координаты, расположенные ниже пунктирной «диагонали», равны нулю, а координаты, стоящие на диагонали, т. е. числа

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr},$$

предполагаются не равными нулю. Назовем такую систему векторов *лестничной*.

4. *Лестничная система векторов линейно независима.*

В самом деле, посмотрим, может ли какая-нибудь линейная комбинация векторов (7):

$$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_r\boldsymbol{a}_r$$

быть равной $\mathbf{0}$. Первая координата вектора $\boldsymbol{a}$ есть, очевидно, c_1a_{11}; если она равна нулю, то (ввиду $a_{11} \neq 0$) $c_1 = 0$. Но тогда вторая координата вектора $\boldsymbol{a}$ есть c_2a_{22}; если и она равна нулю, то (ввиду $a_{22} \neq 0$) $c_2 = 0$. И так далее. В итоге приходим к заключению, что равенство

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_r\boldsymbol{a}_r = \mathbf{0}$$

возможно лишь при условии $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$. Но это и означает линейную независимость системы (7).

Из доказанного нами свойства 4 вытекает такое следствие: в пространстве $\mathbf{R}^n$ существует линейно независимая система, содержащая ровно n векторов.

Примером такой системы может служить лестничная система, состоящая из векторов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Разумеется, любая подсистема этой системы также будет линейно независимой.

Естественно возникает вопрос: можно ли в пространстве $\mathbf{R}^n$ построить линейно независимую систему, содержащую более чем n векторов? Доказанное выше свойство 4 не содержит никаких указаний на этот счет. Ответ будет получен в следующем параграфе; он гласит, что в пространстве $\mathbf{R}^n$ любая система, содержащая более чем n векторов, *линейно зависима*.

В заключение отметим одно важное свойство построенной выше системы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$: любой вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ может быть разложен по этой системе. Действительно, если $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то имеем очевидное равенство:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{e}_n.$$

Итак, *в пространстве $\mathbf{R}^n$ существует система из n линейно независимых векторов, через которые любой вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ линейно выражается.*

Вопросы и упражнения

1. Какая система векторов называется линейно зависимой? линейно независимой?

2. Что означает линейная зависимость в случае, когда система состоит из одного вектора? из двух векторов?

3. Какая система векторов называется лестничной? Из скольких векторов может состоять лестничная система? Почему лестничная система линейно независима?

§ 3. ДВЕ ТЕОРЕМЫ О ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Теорема 1. *Пусть даны две системы векторов*

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_r \text{ и } \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{b}_s,$$

причем $r > s$. Тогда, если каждый вектор первой системы линейно выражается через векторы второй системы, то первая система линейно зависима.

Выражаясь более свободно, мы могли бы сформулировать теорему следующим образом: *если бо́льшая система линейно выражается через меньшую, то бо́льшая система линейно зависима.*

Читатель, вероятно, уже встречался с таким положением, когда «грубая» (но вместе с тем краткая) формулировка позволяет образнее представить и легче запомнить какой-либо факт. Приведенная выше сжатая формулировка теоремы иллюстрирует как раз такое положение.

Доказательство. По условию каждый из векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ разлагается по векторам $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_s$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= k_{11}\boldsymbol{b}_1 + k_{12}\boldsymbol{b}_2 + \dots + k_{1s}\boldsymbol{b}_s, \\ \boldsymbol{a}_2 &= k_{21}\boldsymbol{b}_1 + k_{22}\boldsymbol{b}_2 + \dots + k_{2s}\boldsymbol{b}_s, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{a}_r &= k_{r1}\boldsymbol{b}_1 + k_{r2}\boldsymbol{b}_2 + \dots + k_{rs}\boldsymbol{b}_s. \end{aligned} \tag{1}$$

Наша цель — показать, что система $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ линейно зависима, т. е. что существуют такие числа $x_1, x_2, \dots, x_r$, не равные одновременно нулю, для которых справедливо соотношение

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + x_r\boldsymbol{a}_r = 0. \tag{2}$$

Перепишем равенство (2), заменив в левой части каждый вектор $\boldsymbol{a}_i$ его выражением из (1). Получим:

$$x_1(k_{11}\boldsymbol{b}_1 + \dots + k_{1s}\boldsymbol{b}_s) + \dots + x_r(k_{r1}\boldsymbol{b}_1 + \dots + k_{rs}\boldsymbol{b}_s) = 0,$$

или, если собрать воедино члены с $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_s$,

$$(k_{11}x_1 + \dots + k_{r1}x_r)\boldsymbol{b}_1 + \dots + (k_{1s}x_1 + \dots + k_{rs}x_r)\boldsymbol{b}_s = 0.$$

Посмотрим, нельзя ли подобрать такие числа $x_1, \dots, x_r$ (не равные одновременно нулю), чтобы каждое из выражений, стоящих коэффициентами при $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_s$, было равно нулю. Если окажется, что такие числа существуют, то для них будет справедливо соотношение (2) и, значит, утверждение теоремы является верным.

Приравнивая нулю указанные выражения, получаем:

$$\left.\begin{aligned} k_{11}x_1 + \dots + k_{r1}x_r &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{1s}x_1 + \dots + k_{rs}x_r &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Это однородная система линейных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных (по условию $r > s$). Согласно предыдущему такая система обязательно должна иметь ненулевое решение. Теорема доказана.

Теорема 2. *В пространстве* $\mathbf{R}^n$ *любая система, состоящая более чем из* n *векторов, линейно зависима.*

Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему 1 к двум системам векторов: данной системе, в которой число векторов больше, чем n, и системе из n векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, фигурирующей в последнем предложении § 6.

Пример. Система векторов из $\mathbf{R}^3$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1, \ 2, \ 3), \\ \boldsymbol{a}_2 &= (-1, \ 0, \ 3), \\ \boldsymbol{a}_3 &= (2, \ 5, \ -2), \\ \boldsymbol{a}_4 &= (4, \ 12, \ 2) \end{aligned}$$

линейно зависима, так как число векторов превосходит 3.

Вопросы и упражнения

Доказать теорему 2 без ссылки на теорему 1. Воспользоваться тем, что равенство

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0},$$

записанное в координатах, эквивалентно системе n однородных линейных уравнений с m неизвестными $x_1, \dots, x_m$, причем n по условию меньше, чем m.

§ 4. БАЗИС И РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

1. Определение базиса. Теорема о базисах. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ дана произвольная система векторов (обозначим ее кратко через S). Никаких ограничений на число векторов в системе не налагается: оно может быть конечным или бесконечным. Например, система S может состоять из всех векторов, т. е. совпадать со всем пространством $\mathbf{R}^n$.

Введем важное понятие *базиса системы векторов.*

Пусть S' — какая-либо часть (подсистема) системы S. Подсистема S' *есть базис системы* S, *если* S' — *максимальная линейно независимая подсистема.*

Иными словами, подсистема S' есть *базис* системы S, если: 1) она линейно независима; 2) добавление к подсистеме S' любого другого вектора из системы S превращает эту подсистему в линейно зависимую.

Учитывая одно из свойств линейной зависимости (если система линейно независима, но при прибавлении к ней еще одного вектора становится линейно зависимой, то этот вектор линейно выражается через векторы системы), можно сказать, что *базис системы* S — *это линейно независимая подсистема, через которую линейно выражается любой вектор системы* S.

Из линейной независимости векторов, входящих в базис, следует (см. теорему 2 предыдущего параграфа), что их число не превосходит n. Итак, *базис любой системы векторов пространства* $\mathbf{R}^n$ *всегда содержит не более чем* n *векторов.*

Пример. В системе

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (\ \ 0, -1, \ \ 2, 1), \\ \boldsymbol{a}_2 &= (\ \ 3, \ \ 1, -1, 0), \\ \boldsymbol{a}_3 &= (-6, -2, \ \ 2, 0) \end{aligned}$$

векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ образуют базис. В самом деле, тот факт, что эти векторы линейно независимы между собой, сразу же следует из их непропорциональности. Что же касается вектора $\boldsymbol{a}_3$, то он представим в виде $0 \cdot \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$, т. е. в виде линейной комбинации $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Другой базис образуют векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$. Нетрудно видеть, что указанными двумя базисами исчерпываются все базисы данной системы.

Рассмотренный пример иллюстрирует следующее положение: *хотя в одной и той же системе векторов может быть несколько базисов, число векторов в каждом базисе одно и то же* (в данном случае оно равно двум). Докажем это предложение в общем виде.

Теорема о базисах. *Два различных базиса одной и той же системы векторов содержат одинаковое количество векторов.*

Доказательство следует из теоремы 1 предыдущего параграфа. В самом деле, пусть S' и S'' — два различных базиса системы S, причем первый состоит из r, а второй — из s векторов. Предположим, что $r \neq s$. Тогда из двух чисел — r и s — одно больше другого. Пусть, для определенности, $r > s$. К системам S' и S'' можно в этом случае применить вышеупомянутую теорему, из которой будет следовать, что система S' линейно зависима, вопреки условию. Полученное противоречие доказывает, что $r = s$.

2. Базис пространства $\mathbf{R}^n$. Частным случаем системы векторов в $\mathbf{R}^n$ является все пространство $\mathbf{R}^n$. Что представляют собой базисы пространства $\mathbf{R}^n$?

В конце § 2 было показано, что в пространстве $\mathbf{R}^n$ существует система из n линейно независимых векторов, по которым можно разложить любой вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Эта система и есть, следовательно, базис пространства $\mathbf{R}^n$. Любой другой базис, согласно только что доказанной теореме, должен состоять из n векторов.

Итак, каждый базис пространства $\mathbf{R}^n$ представляет собой систему из n линейно независимых векторов. Но и обратно, любая система из n линейно независимых векторов будет базисом пространства $\mathbf{R}^n$. Действительно, рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Присоединив его к данной системе, получим систему, состоящую из $n + 1$ векторов, которая будет линейно зависимой (см. теорему 2 § 3). Но тогда, в силу одного из свойств линейной зависимости (см. свойство 3 в пункте 5 § 2), вектор $\boldsymbol{a}$ должен разлагаться по данной системе.

Окончательно, *базисы пространства* $\mathbf{R}^n$ *— это в точности все линейно независимые системы, состоящие из n векторов.*

Примером такой системы может служить любая система вида:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ \boldsymbol{a}_2 &= (0, \quad a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{a}_n &= (0, \quad 0, \dots, a_{nn}), \end{aligned}$$

где «диагональные» числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ отличны от нуля, а все числа, расположенные ниже «диагональных», равны нулю. Линейная независимость такой системы векторов (по терминологии § 2, «лестничной» системы) была доказана в пункте 5 § 2.

3. Ранг. С каждой системой векторов можно связать некоторое целое число — ранг системы, являющийся одной из важнейших характеристик системы.

Рангом системы векторов называется число векторов в любом базисе системы.

Другими словами, ранг системы векторов — это максимальное число линейно независимых векторов в данной системе.

В примере пункта 1, где рассматривалась система из векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, ранг системы был равен 2.

Из того, что говорилось выше при определении базиса, следует, что ранг произвольной системы n-мерных векторов никогда не превышает n. Ранг всего пространства $\mathbf{R}^n$, как нам уже известно, в точности равен n.

Вопрос о практическом способе нахождения ранга будет рассмотрен в следующем параграфе. При этом окажется полезной такая лемма.

Лемма. *Ранг системы векторов не изменится, если к этой системе добавить любой вектор, являющийся линейной комбинацией векторов данной системы.*

Заметим, что утверждение леммы можно сформулировать и по-другому: ранг системы не изменится, если вычеркнуть из системы любой вектор, являющийся линейной комбинацией остальных векторов системы.

В самом деле, если обозначить исходную систему через $\widetilde{S}$, а систему, полученную вычеркиванием одного вектора,— через S, то окажется, что $\widetilde{S}$ можно получить из S добавлением вектора, являющегося линейной комбинацией векторов из S. Но в таком случае ранги систем S и $\widetilde{S}$, по лемме, должны быть равны.

Доказательство леммы весьма просто. Пусть дана некоторая система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$; обозначим ее через S. Добавив к ней вектор $\boldsymbol{a}$, являющийся линейной комбинацией нескольких векторов из S, получим новую систему $\widetilde{S}$. Выделим из системы S базис; пусть он образован векторами $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$. Любой вектор системы S разлагается, таким образом, по $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$. Но тогда, очевидно, и вектор $\boldsymbol{a}$ разлагается по $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$; значит, те же самые r векторов образуют базис системы $\widetilde{S}$. Мы видим, что системы S и $\widetilde{S}$ допускают общий базис; следовательно, их ранги совпадают.

Следствие леммы. *Ранг системы векторов не изменится, если к этой системе добавить нулевой вектор.* Или в эквивалентной формулировке: *ранг не изменится, если удалить из системы нулевой вектор* (конечно, при условии, что он в ней имеется).

Вопросы и упражнения

1. Как связаны между собой векторы системы, если в этой системе существует базис, состоящий из одного вектора?

2. Что можно сказать о системе, базис которой совпадает со всей системой?

3. Из скольких векторов может состоять базис системы векторов в $\mathbf{R}^4$?

4. Чем характеризуются различные базисы пространства $\mathbf{R}^n$?

5. Можно ли было бы определить ранг системы векторов как максимальное число линейно независимых векторов в системе, не доказав предварительно теоремы о базисах? Чем было бы плохо такое определение?

6. Изменится ли (и как именно) ранг системы, если добавить к ней вектор, не являющийся линейной комбинацией векторов системы?

7. Используя теорему 1 § 3, доказать, что если даны две системы векторов S_1 и S_2 и каждый вектор из S_1 разлагается по векторам из S_2, то ранг $S_1 \leqslant$ ранг S_2.

§ 5. МАТРИЦА, ЕЕ СТРОЧЕЧНЫЙ И СТОЛБЦЕВОЙ РАНГИ

1. Строчечный и столбцевой ранги. С понятием матрицы читатель уже встречался в § 1 гл. II. Напомним, что матрицей мы называем прямоугольную таблицу, составленную из чисел; последние обычно называют *элементами* матрицы. Элемент, расположенный в i-й строке и j-м столбце матрицы, обозначается a_{ij}. Таким образом, общий вид матрицы, состоящей из m строк и n столбцов, будет:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}. \end{matrix}$$

Как правило, при записи матрицы соответствующую таблицу окружают с обеих сторон круглыми скобками. Будем обозначать матрицы заглавными буквами $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и т. д. (полужирного шрифта). Тогда приведенную выше матрицу можно записать так:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Каждую строку матрицы $\boldsymbol{A}$ можно рассматривать как вектор пространства $\mathbf{R}^n$, а каждый столбец — как вектор пространства $\mathbf{R}^m$*. Обозначим i-ю строку сокращенно $\boldsymbol{a}_i$, а j-й столбец — $\boldsymbol{a}'_j$. Таким образом, с матрицей $\boldsymbol{A}$ можно связать две системы векторов: систему

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$$

векторов-строк и систему

$$\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_n$$

векторов-столбцов. Ранг первой системы будем называть *строчечным рангом* матрицы $\boldsymbol{A}$, ранг второй системы — *столбцевым рангом* матрицы $\boldsymbol{A}$.

Итак, строчечный ранг матрицы $\boldsymbol{A}$ есть максимальное число линейно независимых строк, а столбцевой ранг — максимальное число линейно независимых столбцов.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Строки $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 3, -2)$ и $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 1, 4, 3)$ линейно независимы и образуют базис системы строк ($\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$). Следовательно, строчечный ранг матрицы $\boldsymbol{A}$ равен 2. Столбцы $\boldsymbol{a}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{a}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ также линейно независимы и образуют базис системы столбцов ($\boldsymbol{a}'_3 = 3\boldsymbol{a}'_1 + 7\boldsymbol{a}'_2$, $\boldsymbol{a}'_4 = -2\boldsymbol{a}'_1 + \boldsymbol{a}'_2$), поэтому столбцевой ранг тоже равен 2.

В рассмотренном примере получилось, что строчечный и столбцевой ранги равны между собой. В следующем параграфе мы докажем, что это же самое верно для *любой* матрицы. Равенство строчечного и столбцевого рангов матрицы позволит нам в дальнейшем любой из них называть просто *рангом матрицы*. Пока же — *во всех остальных пунктах этого параграфа — мы будем рассматривать*

* То обстоятельство, что координаты вектора располагаются в одном случае строкой, а в другом — в виде столбца, не должно смущать читателя. Ведь арифметический вектор — это, по определению, набор чисел, заданных в определенном порядке; как записаны эти числа: в виде ли строки или в виде столбца, — совершенно несущественно.

только строчечный ранг; при этом в ряде случаев слово «строчечный» будем в целях краткости опускать.

2. Вычисление строчечного ранга матрицы. Строчечный ранг — одна из важнейших характеристик матрицы. Поэтому весьма важно знать простые способы его вычисления. Одним из таких способов является уже знакомый нам метод Гаусса; только теперь его следует применять не к системе уравнений, а к данной матрице A.

Метод Гаусса основан на элементарных преобразованиях матрицы. Напомним, что элементарными преобразованиями мы называем следующие действия над матрицей:

a) вычеркивание нулевой строки;

b) прибавление к одной из строк другой строки, умноженной на любое число;

c) перестановку двух столбцов.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Строчечный ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.*

Доказательство. Рассмотрим по отдельности каждый из трех типов элементарных преобразований. Совершенно очевидно, что перестановка столбцов не меняет линейных зависимостей между строками матрицы, поэтому для преобразования типа c) утверждение теоремы справедливо.

Для преобразования типа a) неизменность ранга прямо вытекает из утверждения, содержащегося в последнем абзаце пункта 3 § 4.

Пусть теперь над матрицей A выполняется преобразование типа b): к строке a_i прибавляется строка a_j, умноженная на число k. Это преобразование можно выполнить в два приема: сначала добавляем к матрице A новую строку $a_i + ka_j$, вставляя ее сразу после i-й строки, затем из полученной матрицы вычеркиваем строку a_i. Обе операции не меняют ранга матрицы: первая — в силу леммы § 4 (к системе строк матрицы A добавляется новая строка, являющаяся линейной комбинацией строк матрицы A), вторая — в силу той же самой леммы (вычеркиваемая строка a_i является линейной комбинацией двух других: $a_i = (a_i + ka_j) - ka_j$). Теорема доказана.

В чем же состоит метод вычисления ранга, основанный на элементарных преобразованиях? Идея метода заключается в том, что при помощи элементарных преобразований мы приводим данную матрицу к специальному виду

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix} \quad (r \leqslant n), \tag{2}$$

в котором все «диагональные» элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже «диагональных», равны нулю. После того как это сделано, можно сразу же записать:

$$\text{ранг}\, A = r.$$

В самом деле, система всех строк матрицы B линейно независима (по терминологии пункта 5 § 2, это лестничная система векторов), поэтому ранг этой матрицы равен числу ее строк, т. е. r. Учитывая, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях, имеем: ранг A = ранг B, т. е. ранг $A = r$.

Само приведение исходной матрицы A к виду (2) осуществляется с помощью уже знакомой нам процедуры. Прежде всего условимся, что если в процессе преобразований матрицы A появляется строка, состоящая из одних нулей, то эта строка тотчас же отбрасывается (т. е. обязательно применяется преобразование а)). Таким образом, в любой из оставшихся строк имеется хотя бы один элемент, не равный нулю. Пользуясь этим, находим в первой строке матрицы A отличный от нуля элемент a_{1j}. Переставляя (если $j > 1$) первый столбец с j-м, выводим этот элемент на первое место в строке; таким образом, можно считать $a_{11} \neq 0$. Прибавляя к каждой строке, начиная со второй, первую строку, умноженную на подходящее число (для i-й строки оно равно $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$), получим матрицу вида

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix},$$

у которой все элементы первого столбца, кроме a_{11}, равны нулю (на самом деле, конечно, число строк в матрице A' может быть меньше, чем m, так как нулевые строки мы условились отбрасывать). Находим во второй строке матрицы A' элемент a'_{2k}, отличный от нуля, и с помощью перестановки столбцов (если $k > 2$) выводим его на второе место в строке; это позволяет нам предположить, что $a'_{22} \neq 0$. Прибавляя затем к каждой строке, начиная с третьей, подходящее кратное второй строки, получаем матрицу вида

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

и. т. д. Продолжая этот процесс, придем после некоторого числа шагов (не большего, чем n) к матрице вида (2).

3. Примеры. 1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. В данном случае $a_{11} \neq 0$, поэтому перестановка столбцов на первом шаге не нужна. Прибавляем ко второй строке первую, умноженную на -3, к третьей — первую, умноженную на -3, к четвертой — первую, умноженную на -5. Получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{pmatrix}.$$

Здесь $a_{22} \neq 0$. Прибавляем к третьей строке вторую, умноженную на -2, и к четвертой — вторую, умноженную также на -2. Получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

из которой тотчас вычеркиваем нулевую строку. Третий элемент в последней строке равен нулю, однако можно добиться того, чтобы он был отличен от нуля, если переставить третий и пятый столбцы. Тогда получится матрица

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая уже имеет требуемый вид. Ранг матрицы B равен трем; следовательно, и ранг исходной матрицы A также равен трем.

2. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 8 & a \end{pmatrix}$$

для всевозможных значений параметра a.

Решение. Применяем способ элементарных преобразований, как если бы a было конкретным числом:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1-2a & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 8-a & a-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3a & a \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что если хотя бы одно из чисел $6 + 3a$ или a отлично от нуля, то ранг матрицы A равен 3; если же оба указанных числа равны нулю, то ранг A равен 2. Но одновременное обращение чисел a и $6 + 3a$ в нуль невозможно. Поэтому ранг равен 3 при любом значении a.

3. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & a & b & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

для всевозможных значений параметров a и b.

Решение. В данном случае удобно сначала поменять местами первую и четвертую строки, отчего ранг, конечно, не изменится. Имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & a & b & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & a+6 & b-8 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & a+6 & b-8 & -5 \end{pmatrix} \overset{3-5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & b-8 & a+6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & b+37 & a-19 \end{pmatrix}.$$

Отсюда:

ранг A равен 3, если $b = -37$ и $a = 19$ (одновременно),

ранг A равен 4 — в остальных случаях.

4. Нахождение базиса системы векторов и разложение векторов по базису. Покажем, что вычисление ранга матрицы A методом, приведенным в пункте 2, позволяет одновременно *выделить базис в системе строк этой матрицы.*

В процессе приведения матрицы A к матрице B (из r строк) некоторые строки матрицы A обращаются в нулевые и отбрасываются; оставшиеся r строк переходят в строки матрицы B. *Эти оставшиеся r строк матрицы A как раз и составляют искомый базис.*

В самом деле, преобразования матрицы A по методу, описанному в пункте 2, обращают в нулевые те строки матрицы, которые являются линейными комбинациями других (предыдущих) строк. Следовательно, после удаления всех таких строк из A матрица из оставшихся r строк имеет тот же ранг, что и A, т. е. r. Значит, эти оставшиеся r строк линейно независимы и поэтому образуют базис.

Указанным способом получается только один из базисов системы строк. Нетрудно, однако, показать, что, применяя такие же преобразования к матрицам, полученным из A всевозможными перестановками строк, можно получить все базисы системы строк матрицы A.

Так, в примере 1 пункта 3 матрица A имела вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица B, полученная из нее элементарными преобразованиями, вид:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В процессе перехода от A к B третья строка обратилась в нулевую и была отброшена. Значит, 1, 2 и 4-я строки образуют в матрице A базис системы всех строк.

Обратимся теперь к задаче, сформулированной в заголовке этого пункта. Мы можем утверждать, что для первой части задачи — нахождения базиса системы векторов — способ решения нам известен. Действительно, из данных векторов всегда можно составить матрицу A, строками которой они являются; найдя в матрице A базис системы строк, мы тем самым находим базис данной системы векторов. Вторая часть задачи — разложение всех векторов данной системы по базисным — может быть решена попутно с первой. Как именно, показывает следующий пример.

П р и м е р. Для системы векторов

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 2, 3, 1), \\ a_2 &= (2, 3, 1, 2), \\ a_3 &= (3, 1, 2, -2), \\ a_4 &= (0, 4, 2, 5) \end{aligned}$$

найти базис и ранг; выразить через найденный базис все остальные векторы системы.

Р е ш е н и е. Составляем из данных векторов матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

и подвергаем ее элементарным преобразованиям; при этом справа от каждой строки пишем ее выражение через a_1, a_2, a_3, a_4. Итак,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - 3a_1 \\ a_4 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -5 \\ 0 & 0 & -18 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - 3a_1 - 5(a_2 - 2a_1) \\ a_4 + 4(a_2 - 2a_1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3-5\boldsymbol{a}_2+7\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1. \end{matrix}$$

После всех преобразований четвертая строка матрицы A превратилась в нулевую. Значит, строки $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ образуют базис системы строк матрицы A, т. е. базис исходной системы векторов. Ранг этой системы равен 3. Из равенства

$$\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1=0$$

находим выражение вектора $\boldsymbol{a}_4$ через базисные векторы:

$$\boldsymbol{a}_4=-\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_1.$$

Вопросы и упражнения

1. Доказать совпадение строчечного и столбцевого рангов для частного случая, когда:

а) матрица состоит из одной строки; двух строк;

б) строчечный ранг равен 1.

2. Написать какую-нибудь матрицу (строчечного) ранга 1.

3. Почему перестановка столбцов не меняет линейных зависимостей между строками?

§ 6. СОВПАДЕНИЕ СТРОЧЕЧНОГО И СТОЛБЦЕВОГО РАНГОВ. РАНГ МАТРИЦЫ

Т е о р е м а. *В произвольной матрице A ранг системы строк совпадает с рангом системы столбцов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что утверждение теоремы справедливо для матрицы специального вида

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

в которой диагональные элементы b_{11}, b_{22}, ..., b_{rr} отличны от нуля, а все элементы, расположенные ниже диагональных, равны нулю. Действительно, и строки, и столбцы матрицы (1) образуют лестничную систему векторов, а потому линейно независимы; следовательно, оба ранга (строчечный и столбцевой) равны r.

Если к матрице (1) приписать справа какие угодно числа, т. е. составить новую матрицу

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

то строчечный и столбцевой ранги не изменятся: строки по-прежнему образуют лестничную систему из r векторов, первые r столбцов по-прежнему линейно независимы и тем самым в пространстве всех векторов из $\mathbf{R}^r$ образуют базис (см. п. 2 § 4). Таким образом, для матриц вида (2) утверждение теоремы также справедливо.

Но, как мы знаем, любая матрица A с помощью элементарных преобразований может быть приведена к виду (2). Поэтому, чтобы завершить доказательство, нам осталось доказать такую лемму.

Лемма. *При элементарных преобразованиях над матрицей A оба ранга — строчечный и столбцевой — остаются неизменными.*

Доказательство. Что строчечный ранг не меняется при элементарных преобразованиях, было доказано раньше (см. теорему п. 2 § 5). Проверим теперь, что столбцевой ранг также остается неизменным.

Рассмотрим три возможных типа элементарных преобразований:

a) вычеркивание нулевой строки;

b) прибавление к одной строке другой, умноженной на любое число;

c) перестановку двух столбцов.

Для преобразования c) утверждение леммы очевидно. Далее, поскольку преобразование a) не нарушает никаких линейных зависимостей между столбцами и не создает новых зависимостей, то и для него утверждение леммы справедливо.

Рассмотрим преобразование типа b). Пусть, например, к первой строке матрицы A прибавляется вторая строка, умноженная на число k. Если исходный вид матрицы A есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то после преобразования получим матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & \dots & a_{1n} + ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Наша цель — показать, что ранг системы столбцов матрицы A тот же, что и матрицы A^*.

Обозначим столбцы матрицы A, как и раньше, через a'_1, $a'_2, \dots, a'_n$ (соответственно) и допустим, что между ними имеет место линейная зависимость вида:

$$c_1a'_1 + c_2a'_2 + \dots + c_na'_n = 0. \qquad (3)$$

Покажем, что тогда *эта же самая зависимость имеет место между столбцами матрицы A^**

Векторное равенство (3) в координатной записи означает, что

$$\begin{aligned} c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \ldots + c_n a_{1n} &= 0, \\ c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \ldots + c_n a_{2n} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 a_{m1} + c_2 a_{m2} + \ldots + c_n a_{mn} &= 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Прибавим к первому из этих равенств второе, умноженное на k. Получим:

$$c_1 (a_{11} + ka_{21}) + c_2 (a_{12} + ka_{22}) + \ldots + c_n (a_{1n} + ka_{2n}) = 0.$$

Это равенство вместе со 2, 3, ..., m-м равенствами (4) показывает, что между столбцами матрицы A^* имеет место линейная зависимость с теми же самыми коэффициентами c_1, c_2, ..., c_n, что и в (3).

Обратно, если имеется некоторая линейная зависимость между столбцами матрицы A^*, то *в точности такая же зависимость справедлива для столбцов матрицы* A (ведь A получается из A^* также преобразованием типа b)).

Из двух доказанных выше предложений (прямого и обратного) вытекает, что ранг системы столбцов матрицы A совпадает с рангом системы столбцов матрицы A^*. Лемма доказана.

Ввиду совпадения строчечного и столбцевого рангов матрицы будем в дальнейшем называть любой из них просто *рангом матрицы*.

§ 7. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Средства, которыми мы теперь располагаем, достаточны для того, чтобы обратиться к детальному анализу линейных уравнений.

Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Введем в рассмотрение две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Первая составлена из коэффициентов при неизвестных в системе (1), а вторая получается из нее добавлением столбца свободных членов. Обозначим строки матрицы A через $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_m$, а строки матрицы A' через $\boldsymbol{a}'_1$ $\boldsymbol{a}'_2$, ..., $\boldsymbol{a}'_m$. Поскольку строки матрицы A являются «кусками» строк матрицы A', совершенно очевидно, что любая линейная зависимость между строками A' влечет за собой такую же точно зависимость между строками A:

$$k_1\boldsymbol{a}'_1 + k_2\boldsymbol{a}'_2 + \ldots + k\boldsymbol{a}'_m = 0 \Rightarrow k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m = 0. \quad (2)$$

1. Критерий совместности. В § 2 главы II мы установили следующий факт: система (1) несовместна тогда и только тогда, когда из ее уравнений можно составить комбинацию вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b,$$

где b — число, отличное от нуля.

Если учесть, что линейной комбинации уравнений системы (1) отвечает такая же линейная комбинация строк матрицы A' (или матрицы A, если иметь в виду только левые части уравнений), то условие несовместности можно сформулировать так: система несовместна в том и только в том случае, когда некоторая линейная комбинация строк матрицы A равна нулю (точнее, нулевому вектору), а та же самая линейная комбинация строк матрицы A' отлична от нуля.

Отсюда можно получить и условие совместности системы (1). А именно *для совместности системы (1) необходимо и достаточно выполнение такого условия: если какая-либо линейная комбинация строк матрицы **A** равна нулю, то равна нулю и такая же комбинация строк матрицы **A'***. В сжатой записи это условие выглядит так:

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m = 0 \Rightarrow k_1\mathbf{a}'_1 + k_2\mathbf{a}'_2 + \ldots + k_m\mathbf{a}'_m = 0. \quad (3)$$

Следующая теорема дает условие совместности системы (1) в терминах рангов матриц A и A'.

Теорема (критерий совместности). *Система (1) совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц **A** и **A'** совпадают.*

Заметим, что матрицу A часто называют *основной*, а матрицу A' — *расширенной* матрицей системы (1). С учетом этой терминологии теорему можно сформулировать так:

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.

Доказательство.

1. Предположим, что система совместна; докажем тогда, что ранги матриц A и A' совпадают.

Для этого достаточно показать, что линейные зависимости между строками матрицы A в точности те же самые, что и между строками матрицы A', т. е.

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m = 0 \Leftrightarrow k_1\mathbf{a}'_1 + k_2\mathbf{a}'_2 + \ldots + k_m\mathbf{a}'_m = 0.$$

Но то, что из правого равенства следует левое, уже отмечалось раньше (см. (2)), а то, что из левого равенства следует правое, есть как раз условие (3) совместности системы.

2. Обратно, допустим, что ранги матриц A и A' совпадают. Докажем, что система (1) совместна.

Для этого, как известно, достаточно проверить выполнение условия (3).

Выделим из системы строк матрицы A базис. Без ограничения общности можно считать, что он образован первыми r строками. В таком случае первые r строк матрицы A' тоже будут линейно независимы (всякая линейная зависимость между ними означала бы, как уже отмечалось, такую же зависимость между строками матрицы A). Так как ранг матрицы A' тоже равен r, то и в этой матрице первые r строк образуют базис.

Возьмем теперь какие-нибудь числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$ и рассмотрим два вектора

$$\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m$$

и

$$\boldsymbol{a}' = k_1\boldsymbol{a}'_1 + k_2\boldsymbol{a}'_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}'_m.$$

Заменяя каждый из векторов $\boldsymbol{a}'_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}'_m$ его выражением через базис, получим равенство вида

$$k_1\boldsymbol{a}'_1 + k_2\boldsymbol{a}'_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}'_m = c_1\boldsymbol{a}'_1 + c_2\boldsymbol{a}'_2 + \ldots + c_r\boldsymbol{a}'_r.$$

Такое же равенство, в силу (2), должно быть справедливо и для строк матрицы A:

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_r\boldsymbol{a}_r.$$

Предположим, что числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$ таковы, что вектор $\boldsymbol{a}$ равен нулю. Тогда, в силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$, будем иметь: $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\boldsymbol{a}' = 0$. Этим доказано условие (3). Теорема доказана полностью.

Если система (1) совместна, то общее значение рангов матрицы A и матрицы A' называется *рангом* самой системы.

2. Векторная запись системы линейных уравнений. Другой вывод критерия совместности. Любую систему (1) линейных уравнений можно записать в виде одного уравнения для векторов.

Чтобы получить векторную запись системы (1), введем следующие обозначения: $\boldsymbol{a}^*_1$ — столбец коэффициентов при x_1 (или, что то же самое, первый столбец матрицы A'), $\boldsymbol{a}^*_2$ — столбец коэффициентов при x_2 и т. д., наконец, $\boldsymbol{b}$ — столбец свободных членов системы (последний столбец матрицы A'). Каждый из указанных столбцов можно рассматривать как вектор пространства R^m. Покажем, что *система* (1) *эквивалентна* следующему *векторному уравнению:*

$$x_1\boldsymbol{a}^*_1 + x_2\boldsymbol{a}^*_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}^*_n = \boldsymbol{b}. \qquad (1')$$

Действительно, равенство двух векторов из $\mathbf{R}^m$ означает равенство первых, вторых, третьих и т. д., наконец, m-х координат. Поэтому уравнение (1′) равносильно системе уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n} = b_1 \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots + x_na_{2n} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \ldots + x_na_{mn} = b_m \end{array}\right\}.$$

Но это в точности система (1), разве что только записанная несколько иначе. Итак, (1′) является *векторной записью системы* (1).

П р и м е р. Для системы

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 4x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{array}\right\}$$

векторная запись будет иметь следующий вид:

$$x_1 \binom{3}{1} + x_2 \binom{4}{-1} = \binom{-1}{2}.$$

Векторная запись (1) позволяет по-новому взглянуть на вопрос о совместности системы (1). Теперь он может быть сформулирован в следующем виде: допускает ли вектор b разложение по векторам $\overset{*}{a}_1, \overset{*}{a}_2, \ldots, \overset{*}{a}_n$? При таком подходе теорема, установленная в пункте 1, становится особенно прозрачной. Приведем еще одно доказательство этой теоремы.

Пусть система (1) совместна. Тогда вектор b является линейной комбинацией векторов $\overset{*}{a}_1, \overset{*}{a}_2, \ldots, \overset{*}{a}_n$, т. е. последний столбец матрицы A' разлагается по остальным столбцам этой матрицы. Но в таком случае, если исключить из матрицы A' столбец b, ранг матрицы столбцов не изменится. Следовательно, ранг матрицы A' равен рангу матрицы A.

Обратно, допустим, что ранги матриц A и A' совпадают. Выделим из системы всех столбцов матрицы A базис; для определенности будем считать его образованным первыми r столбцами. Поскольку ранг матрицы A' также равен r, то те же самые r столбцов и в матрице A' образуют базис системы всех столбцов. Но тогда последний столбец матрицы, т. е. b, должен по ним разлагаться. Следовательно, существуют числа $k_1, k_2, \ldots, k_r$ такие, что

$$b = k_1\overset{*}{a}_1 + k_2\overset{*}{a}_2 + \ldots + k_r\overset{*}{a}_r.$$

Переписывая это равенство в виде

$$b = k_1\overset{*}{a}_1 + k_2\overset{*}{a}_2 + \ldots + k_r a_r + 0 \cdot \overset{*}{a}_{r+1} + \ldots + 0 \cdot \overset{*}{a}_n$$

и сравнивая с ($'$), видим, что одно из решений исходной системы (1) есть $x_1 = k_1, \ldots, x_r = k_r, x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0$. Следовательно, система совместна.

3. Число решений совместной системы. В § 1 главы II был поставлен вопрос, имеющий принципиальное значение: зависит ли число уравнений, остающихся в системе после применения к ней метода Гаусса, от конкретной реализации метода? Докажем, что *не зависит*.

Пусть система (1) совместна. Решая ее методом Гаусса, получим после ряда элементарных преобразований систему следующего вида:

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}x_1 \qquad + c_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n = c_1 \\ \quad c_{22}x_2 \quad + c_{2,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n = c_2 \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad c_{rr}x_r + c_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n = c_r \end{array}\right\}.$$

Ранг этой системы равен числу уравнений в ней, т. е. r (проверьте это, выписав матрицу из коэффициентов при неизвестных). Это значит, что и ранг исходной системы (1) также равен r. Таким образом, число уравнений, остающихся в системе (1) после применения к ней метода Гаусса, равно рангу этой системы. Тем самым оно не зависит от конкретной реализации метода Гаусса. Мы доказали следующую важную теорему.

Теорема. *Пусть система совместна и ее ранг равен r. Тогда число уравнений, остающихся в системе после преобразования ее методом Гаусса, также равно r, а число свободных неизвестных равно* $n - r$ (где n — число всех неизвестных).

В частности, *если $r = n$, то система имеет единственное решение, а если $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений.*

4. Структура множества всех решений системы линейных уравнений. С каждой системой линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

можно связать однородную систему:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}, \qquad (1^\circ)$$

которая получается из данной системы заменой свободных членов нулями. Совместное рассмотрение двух систем — данной и соответствующей ей однородной — помогает лучше понять свойства решений данной системы.

Докажем следующие два предложения.

1. *Сумма любого решения данной системы с любым решением соответствующей однородной системы является снова решением данной системы.*

В самом деле, пусть

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

— какое-либо решение системы (1), а

$$\boldsymbol{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$$

— решение системы (1°). Требуется доказать, что вектор

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^\circ = (x_1 + x_1^\circ, x_2 + x_2^\circ, \ldots, x_n + x_n^\circ)$$

является решением системы (1). Имеем:

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & & a_{11}x_1^\circ + \ldots + a_{1n}x_n^\circ = 0, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & \text{и} & a_{21}x_1^\circ + \ldots + a_{2n}x_n^\circ = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & & a_{m1}x_1^\circ + \ldots + a_{mn}x_n^\circ = 0. \end{array}$$

Складывая каждое равенство, записанное слева, с соответствующим равенством, записанным справа, получим:

$$\begin{array}{l} a_{11}(x_1 + x_1^\circ) + \ldots + a_{1n}(x_n + x_n^\circ) = b_1, \\ a_{21}(x_1 + x_1^\circ) + \ldots + a_{2n}(x_n + x_n^\circ) = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}(x_1 + x_1^\circ) + \ldots + a_{mn}(x_n + x_n^\circ) = b_m. \end{array}$$

Эти равенства означают, что вектор $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^\circ$ есть решение системы (1).

2. *Разность двух решений данной системы есть решение соответствующей однородной системы.*

В этом случае мы должны доказать, что если

$$\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', \dots, x_n') \text{ и } \boldsymbol{x}'' = (x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$$

— любые два решения системы (1), то вектор

$$\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'' = (x_1' - x_1'', x_2' - x_2'', \dots, x_n' - x_n'')$$

есть решение системы (1°). Доказательство вполне аналогично предыдущему; предоставляем читателю провести его самостоятельно.

Из двух рассмотренных выше предложений вытекает такая теорема.

Теорема. *Складывая какое-нибудь одно решение системы* (1) *с каждым из решений однородной системы* (1°), *получим все без исключения решения системы* (1).

В самом деле, пусть $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — фиксированное решение системы (1). Складывая его со всевозможными решениями системы (1°), мы будем получать, согласно предложению 1, решения системы (1). Вопрос заключается в том, *всякое ли* решение системы (1) может быть получено таким путем. Покажем, что всякое. Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольное решение системы (1). Вектор $\boldsymbol{x}^\circ = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}$, согласно 2, является решением системы (1°). Но $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{x}^\circ$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{x}$ получается путем сложения $\boldsymbol{c}$ с некоторым решением системы (1°). Теорема доказана.

Вопросы и упражнения

1. Пусть из нескольких уравнений системы составляется линейная комбинация. Какому действию над строками матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}'$ (основной и расширенной) это соответствует?

2. Как формулируется в терминах строк матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}'$ условие несовместности системы?

3. Как связаны ранги основной и расширенной матриц в случае совместной системы? несовместной системы?

4. Что называется рангом совместной системы линейных уравнений?

5. Чему равно число уравнений, остающихся в совместной системе после преобразования ее методом Гаусса?

6. От каких чисел (и как именно) зависит тот факт, что система линейных уравнений:

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет бесконечное множество решений?

7. Как связаны между собой множества решений данной системы уравнений и соответствующей однородной системы?

§ 8. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

С точки зрения элементарной алгебры представляют особый интерес системы уравнений с двумя и тремя неизвестными. Такие системы допускают непосредственное геометрическое истолкование — на плоскости или в трехмерном пространстве. Благодаря этому их исследование легко переводится на геометрический язык.

1. Система с двумя неизвестными x, y. Как известно, уравнение первой степени с двумя неизвестными

$$ax + by = c, \tag{1}$$

где хотя бы одно из чисел a, b отлично от нуля, представляет собой уравнение прямой линии на плоскости. Если задана система, состоящая из m таких уравнений, то ей отвечают на плоскости m прямых. Решить систему — значит (на геометрическом языке) найти все точки, принадлежащие одновременно m прямым.

Если все коэффициенты при неизвестных в уравнении (1) равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то уравнение не имеет решений; система, содержащая такое уравнение, несовместна. Если же наряду с коэффициентами при неизвестных и свободный член уравнения равен нулю, то такому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестных и, следовательно, такое уравнение из системы может быть удалено. Полученная система будет равносильна исходной. В связи с этим в дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие уравнения, в которых хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля.

Произвольная система линейных уравнений с двумя неизвестными x, y может быть записана в виде:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_mx + b_my = c_m \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Этой системе соответствуют две матрицы (основная и расширенная):

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdot & \cdot \\ a_m & b_m \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & b_m & c_m \end{pmatrix}.$$

Так как строки матрицы A суть векторы размерности 2, то ее ранг не превышает 2; аналогично ранг r' матрицы A' не превышает 3. Так как ранг расширенной матрицы должен либо совпадать с рангом основной, либо превышать его на единицу (добавляется лишь один столбец), то для системы (2) возможны следующие 4 случая:

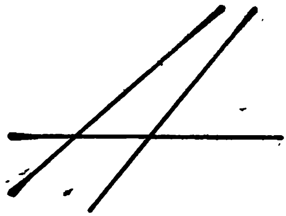


Рис. 10

a) $r = 1,\ r' = 1$;
b) $r = 1,\ r' = 2$;
c) $r = 2,\ r' = 2$;
d) $r = 2,\ r' = 3$.

Рассмотрим каждый из них в отдельности.

a) $r = 1,\ r' = 1$. В этом случае все строки расширенной матрицы пропорциональны одной. Следовательно, мы имеем, по существу, одно уравнение с двумя неизвестными, которое обладает бесчисленным множеством решений. Геометрически это значит, что все прямые, соответствующие уравнениям нашей системы, сливаются в одну прямую, которая и представляет множество решений системы (2).

b) $r = 1,\ r' = 2$. Поскольку ранги матриц A и A' не совпадают, система несовместна. Равенство $r = 1$ означает, что все строки матрицы A, а значит, левые части всех уравнений пропорциональны; в то же время из $r' = 2$ следует, что в матрице A' имеются две непропорциональные строки, т. е. в системе (2) имеются два уравнения, для которых отношение правых частей не равно отношению левых. Все m прямых системы (2) параллельны, причем по крайней мере две из них не сливаются. Точек, общих для всех прямых, не существует.

c) $r = 2,\ r' = 2$. Ранги матриц A и A' совпадают, следовательно, система совместна. Равенство $r = 2$ означает, что в матрице A имеются две непропорциональные строки, т. е. среди уравнений системы имеются два таких, левые части которых не пропорциональны. Соответствующие две прямые на плоскости пересекаются в единственной точке. Так как система совместна, то через эту точку проходят и остальные прямые. Итак, все прямые имеют единственную общую точку.

d) $r = 2,\ r' = 3$. Система несовместна. Среди m прямых имеются две (по крайней мере) пересекающиеся и третья, не проходящая через точку пересечения первых двух (рис. 10).

2. Система с тремя неизвестными x, y, z. Общий вид такой системы:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ \dots\dots\dots&\dots\dots \\ a_mx + b_my + c_mz &= d_m \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Из курса аналитической геометрии известно, что уравнение первой степени с тремя неизвестными

$$ax + by + cz = d \tag{4}$$

(где хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля) представляет собой уравнение плоскости в пространстве. Поэтому системе (3) отвечают m плоскостей. Обозначим их $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ (соответственно). Решить систему — значит (на геометрическом языке) найти все точки, принадлежащие одновременно m плоскостям.

Матрицы A и A', отвечающие системе (3):

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & b_m & c_m \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & b_m & c_m & d_m \end{pmatrix}.$$

Для их рангов возможны 6 случаев:

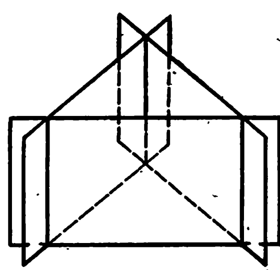
a) $r = 1, r' = 1$;
b) $r = 1, r' = 2$;
c) $r = 2, r' = 2$;
d) $r = 2, r' = 3$;
e) $r = 3, r' = 3$;
f) $r = 3, r' = 4$.

Рассмотрим каждый из них отдельно. При этом будем опираться на следующий факт из аналитической геометрии: если плоскость задана уравнением (4), то вектор $\boldsymbol{n}$ с координатами a, b, c перпендикулярен этой плоскости. Системе (3) отвечают m таких векторов $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \ldots, \boldsymbol{n}_m$.

a) $r = 1, r' = 1$. Второе из этих равенств показывает, что все строки матрицы A' пропорциональны. Отсюда следует, что вся система (3) может быть заменена любым из ее уравнений. Все плоскости $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ сливаются, система имеет бесчисленное множество решений;

b) $r = 1, r' = 2$ — система несовместна. Первое равенство означает, что все строки матрицы A, а значит, и левые части всех уравнений системы (3) пропорциональны. Следовательно, плоскости $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ параллельны; при этом хотя бы две из них не сливаются;

c) $r = 2, r' = 2$ — система совместна. Из первого равенства следует, что в матрице A имеются две непропорциональные строки, допустим первая и вторая, а все остальные строки разлагаются по ним. Следовательно, векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ неколлинеарны, а векторы $\boldsymbol{n}_3, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ разлагаются по $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$; в частности, все векторы $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ параллельны одной плоскости Π. В этом случае плоскости $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ должны быть параллельны одной прямой (а имен-



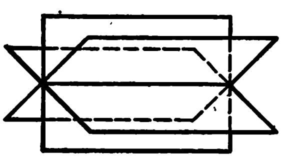


Рис. 11

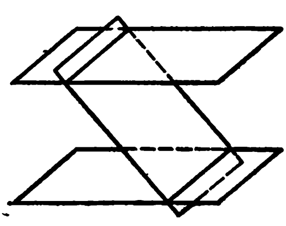


Рис. 12

но прямой, которая перпендикулярна Π). И так как существует хотя бы одна точка, общая всем указанным плоскостям (ведь система совместна!), то приходим к заключению: плоскости Π_1, Π_2, ..., Π_m проходят через одну прямую, или, другими словами, принадлежат одному пучку (рис. 11). Система имеет бесчисленное множество решений;

d) $r = 2$, $r' = 3$ — система несовместна. Так же, как в предыдущем случае, доказывается, что все плоскости параллельны одной прямой; но теперь уже плоскости не принадлежат одному пучку (рис. 12);

e) $r = 3$, $r' = 3$ — система совместна. Условие $r = 3$ означает, что плоскости не параллельны одной прямой (в противном случае мы имели бы $r = 2$ или $r = 1$). Следовательно, среди них найдутся три, образующие «трехгранный угол». Остальные плоскости проходят через вершину этого угла. Решение единственно;

f) $r = 3$, $r' = 4$. Этот случай является наиболее общим (объясните почему!). Система несовместна. Среди ее плоскостей имеются три, образующие «трехгранный угол», и четвертая, которая не проходит через вершину этого угла.

§ 9. ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ НАБОР РЕШЕНИЙ

1. Необходимое и достаточное условие существования ненулевых решений. Пусть дана однородная система m уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Такая система, как мы знаем, всегда совместна (очевидное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$), поэтому к ней применима теорема, доказанная в пункте 3 § 7). Согласно этой теореме, если ранг матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, меньше числа неизвестных n, то система имеет бесчисленное множество решений (в их числе, разумеется, будут и ненулевые решения); если же ранг матрицы A равен n, то решение будет единственным (т. е. нулевым). Итак, справедлива следующая

Теорема. *Для существования ненулевого решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, был меньше числа неизвестных.*

2. Свойства решений однородной системы. Каждое решение системы представляет собой совокупность n значений неизвестных и, следовательно, может рассматриваться как некоторый вектор $\boldsymbol{x}$ из пространства $\mathbf{R}^n$:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Установим следующие два предложения.

1) *Если* $\boldsymbol{x}$ *— решение системы* (1), *то* $k\boldsymbol{x}$ (где k — любое число) *есть также решение системы* (1).

2) *Если* $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ *— два решения системы* (1), *то* $\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}''$ *есть снова решение системы* (1).

Первое предложение почти очевидно. Имеем:

$$k\boldsymbol{x} = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n).$$

Если подставить эти значения неизвестных в любое уравнение системы, то получим тождество:

$$a_{i1}(kx_1) + a_{i2}(kx_2) + \ldots + a_{in}(kx_n) =$$
$$= k(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) = k \cdot 0 = 0,$$

где i — любое из чисел 1, 2, ..., m.

Столь же просто доказывается второе предложение. Пусть

$$\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_n'),\ \boldsymbol{x}'' = (x_1'', x_2'', \ldots, x_n'').$$

Тогда

$$\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'' = (x_1' + x_1'', x_2' + x_2'', \ldots, x_n' + x_n'').$$

Чтобы проверить, что $\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}''$ есть решение системы (1), нужно соответствующие значения неизвестных подставить в левую часть каждого из уравнений. Имеем:

$$a_{i1}(x_1' + x_1'') + a_{i2}(x_2' + x_2'') + \ldots + a_{in}(x_n' + x_n'') =$$
$$= [a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2' + \ldots + a_{in}x_n'] +$$
$$+ [a_{i1}x_1'' + a_{i2}x_2'' + \ldots + a_{in}x_n''] = 0 + 0 = 0,$$

где i — любое из чисел 1, 2, ..., m (первая из двух сумм, заключенных в квадратные скобки, равна нулю, так как $\boldsymbol{x}'$ есть решение данной системы, вторая сумма равна нулю, поскольку $\boldsymbol{x}''$ удовлетворяет системе).

Из доказанных предложений следует такая теорема.

Теорема. *Любая линейная комбинация решений однородной системы есть снова решение этой системы.*

В самом деле, пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ — произвольный набор решений системы (1). Составим линейную комбинацию

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + k_p\boldsymbol{x}_p.$$

В силу доказанного выше предложения 1) каждый из векторов $k_1\boldsymbol{x}_1, k_2\boldsymbol{x}_2, \ldots, k_p\boldsymbol{x}_p$ является решением системы (1); в силу предложения 2) сумма этих решений снова является решением.

3. Фундаментальный набор решений. Общее решение однородной системы. Рассмотрим множество всех решений однородной системы (1). Это некоторое множество векторов в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{R}^n$. Любой базис этого множества называется *фундаментальным набором* решений системы (1).

Иначе говоря, фундаментальный набор — это набор из конечного числа решений

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p$$

системы (1), удовлетворяющих условиям:

1) эти решения линейно независимы;

2) любое решение данной системы по ним разлагается.

Из теоремы о базисах, доказанной в пункте 1 § 4, сразу же следует, что *любые два фундаментальных набора состоят из одного и того же числа решений*. Чему равно это число, мы узнаем немного позднее.

Итак, если нам известен какой-либо фундаментальный набор решений $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p$, то любое решение представляется в виде линейной комбинации

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + k_p\boldsymbol{x}_p; \tag{2}$$

и, обратно, любая такая комбинация есть решение. Иначе говоря, выражение $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + k_p\boldsymbol{x}_p$ охватывает (при всевозможных значениях параметров $k_1, k_2, \ldots, k_p$) все без исключения решения системы (1); оно есть как бы сжатая запись всех решений системы (1). Естественно поэтому называть его *общим решением* системы (1).

4. Способ построения фундаментального набора решений. Для построения фундаментального набора можно воспользоваться все тем же методом Гаусса.

Применив его к системе (1), после ряда преобразований придем к равносильной ей системе

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}x_1 \qquad\qquad + c_{1,\, r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n = 0 \\ \quad c_{22}x_2 \qquad + c_{2,\, r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad c_{rr}x_r + c_{r,\, r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

или же к системе, получающейся из этой изменением нумерации неизвестных. Для определенности допустим, что получилась именно система (3). Придадим свободным неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в системе (3) следующие значения:

$$x_{r+1} = 1,\ x_{r+2} = 0,\ x_{r+3} = 0,\ \ldots,\ x_n = 0,$$

после чего найдем из системы значения остальных неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Мы получим некоторое решение исходной системы (1) — обозначим его $\boldsymbol{x}_{r+1}$ (индекс $r+1$ выбран в связи с тем, что при образовании этого решения свободное неизвестное x_{r+1} играет особую роль). Аналогичным образом, полагая

$$x_{r+1} = 0,\ x_{r+2} = 1,\ x_{r+3} = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$$

и находя соответствующие значения $x_1, x_2, \ldots, x_r$, получим еще одно решение; обозначим его $\boldsymbol{x}_{r+2}$. И так далее. Всего мы получим, таким образом, $n-r$ решений системы (1): $\boldsymbol{x}_{r+1}, \boldsymbol{x}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{r+1} &= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\boldsymbol{x}_{r+2} &= (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
\boldsymbol{x}_{r+3} &= (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r, 0, 0, 1, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\boldsymbol{x}_n &= (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned} \tag{4}$$

Докажем, что *векторы $\boldsymbol{x}_{r+1}, \boldsymbol{x}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ образуют как раз фундаментальный набор решений.*

Линейная независимость этих векторов проверяется совсем просто: если бы указанные векторы были линейно зависимы, то линейно зависимы были бы и «куски» этих векторов:

$$\begin{gathered}
(1, 0, 0, \ldots, 0),\\
(0, 1, 0, \ldots, 0),\\
\ldots\ldots\ldots\\
(0, 0, 0, \ldots, 1),
\end{gathered}$$

что, как мы знаем, невозможно. Остается показать, что любое решение $\boldsymbol{x}$ системы (1) разлагается по $\boldsymbol{x}_{r+1}, \boldsymbol{x}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Пусть

$$\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n).$$

Рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{x}' = a_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1} + a_{r+2}\boldsymbol{x}_{r+2} + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n.$$

Будучи линейной комбинацией решений, вектор $\boldsymbol{x}'$ сам является решением. Из (4) явствует, что последние $n-r$ координат вектора $\boldsymbol{x}'$ равны соответственно $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n$, т. е. совпадают с последними $n-r$ координатами вектора $\boldsymbol{x}$. Но в таком случае у вектора $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$, тоже являющегося решением, последние $n-r$ координат равны нулю. Однако из представления системы в виде (3) следует, что если свободные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ равны нулю, то равны нулю и $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Следовательно, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ есть нулевой вектор, т. е. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$. Это показывает, что вектор $\boldsymbol{x}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{x}_{r+1}, \boldsymbol{x}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, что и требовалось доказать.

Прежде чем перейти к примерам, обратим внимание читателя на следующий важный факт: *число решений в фундаментальном наборе равно $n-r$, т. е. разности между числом неизвестных и рангом матрицы $\boldsymbol{A}$, составленной из коэффициентов при неизвестных.*

Пример. Пусть имеем систему

$$\left.\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0\\
3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0\\
4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0\\
3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0
\end{aligned}\right\}.$$

В данном случае решение методом Гаусса приводит к уравнениям:

$$x_1 = 8x_3 - 7x_4, \ x_2 = -6x_3 + 5x_4.$$

Фундаментальный набор состоит из двух решений и может быть выбран следующим образом:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	−6	1	0
−7	5	0	1

Любое решение (x_1, x_2, x_3, x_4) данной системы уравнений может быть представлено в виде линейной комбинации

$$k_1(8, \ -6, \ 1, \ 0) + k_2(-7, \ 5, \ 0, \ 1)$$

(где $k_1 = x_3, \ k_2 = x_4$).

Вопросы и упражнения

1. От взаимоотношения каких чисел зависит, имеет ли данная однородная система хотя бы одно ненулевое решение?

2. Какой набор решений однородной системы линейных уравнений называется фундаментальным? Почему все фундаментальные наборы состоят из одинакового числа решений? Как может быть записано общее решение однородной системы?

3. Из скольких решений состоит фундаментальный набор решений?

§ 10. ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ НАБОР РЕШЕНИЙ

В главе II уже говорилось об аналогии, которая имеет место между свойствами систем линейных уравнений и свойствами систем линейных неравенств. Наиболее наглядно эта аналогия проявляется в случае *однородных* систем.

1. Свойства решений однородной системы линейных неравенств. Пусть дана однородная система m линейных неравенств с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Каждое решение системы можно рассматривать как некоторый вектор $\boldsymbol{x}$ из $\mathbf{R}^n$:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Справедливы следующие два предложения.

1) *Если $\boldsymbol{x}$ — решение системы* (1) *и k — любое неотрицательное число, то $k\boldsymbol{x}$ есть снова решение системы* (1).

Действительно, подставляя в левую часть i-го неравенства системы вместо неизвестных числа $kx_1, kx_2, \ldots, kx_n$, получим:

$$a_{i1}(kx_1) + a_{i2}(kx_2) + \ldots + a_{in}(kx_n) = k(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \geqslant 0,$$

ибо $k \geqslant 0$ (по условию) и $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqslant 0$ (вектор x есть решение системы (1)).

2) *Если x' и x'' — два решения системы* (1), *то $x' + x''$ есть снова решение системы* (1). Доказательство очевидно.

Условимся называть выражение вида

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_px_p,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_p$ — неотрицательные числа, неотрицательной линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Из свойств 1) и 2) непосредственно следует такое предложение:

Неотрицательная линейная комбинация любого числа решений однородной системы (1) *есть снова решение этой системы.*

2. Фундаментальный набор решений. Введем такое определение.

Набор из конечного числа решений

$$x_1, x_2, \ldots, x_p \tag{2}$$

однородной системы (1) называется *фундаментальным набором* решений, если любое решение системы является неотрицательной линейной комбинацией векторов (2).

Таким образом, если нам известен фундаментальный набор решений для системы (1), то общее решение системы может быть задано формулой:

$$x = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_px_p, \tag{3}$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_p$ — любые неотрицательные числа. Можно поэтому считать, что, располагая каким-нибудь фундаментальным набором решений системы (1), мы имеем исчерпывающее описание всех решений системы.

Замечание. Для полной аналогии со случаем уравнений векторы фундаментального набора естественно было бы подчинить условию «неотрицательной» линейной независимости, т. е. потребовать, чтобы ни один из этих векторов не являлся неотрицательной комбинацией остальных (отметим, что в этом случае число решений в любом фундаментальном наборе было бы одно и то же). Мы этого, однако, не делаем, чтобы не осложнять задачу отыскания фундаментального набора.

3. Линейная функция от n аргументов. Для упрощения дальнейших записей будем выражение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

обозначать $L(x)$, где x есть вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и называть *линейной функцией* от n аргументов. Легко убедиться, что для линейной функции справедливы такие соотношения:

$$L(kx) = kL(x), \tag{4}$$
$$L(x' + x'') = L(x') + L(x''). \tag{5}$$

Это непосредственно следует из равенств

$$a_1(kx_1) + a_2(kx_2) + \ldots + a_n(kx_n) = k(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n),$$
$$a_1(x_1' + x_1'') + a_2(x_2' + x_2'') + \ldots + a_n(x_n' + x_n'') = (a_1x_1' + a_2x_2' + \ldots$$
$$\ldots + a_nx_n') + (a_1x_1'' + a_2x_2'' + \ldots + a_nx_n'').$$

Из (4) и (5) вытекает следующее общее свойство линейной функции:

$$L(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_px_p) = k_1L(x_1) + k_2L(x_2) + \ldots + k_pL(x_p),$$

которым мы дальше будем постоянно пользоваться.

4. Примеры фундаментальных наборов решений. 1. Построим фундаментальный набор решений для системы, состоящей из одного неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant 0, \tag{6}$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не равны одновременно нулю.

Обозначая левую часть неравенства через $L(x)$, перепишем его в виде

$$L(x) \geqslant 0.$$

Рассмотрим наряду с данным неравенством уравнение

$$L(x) = 0. \tag{7}$$

Для этого уравнения можно (например, способом, указанным в пункте 4 предыдущего параграфа) построить фундаментальный набор решений. Число решений в этом наборе будет равно $n - 1$ (разности между числом неизвестных и рангом матрицы из коэффициентов при неизвестных). Итак, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ — фундаментальный набор решений для уравнения (7).

Прежде всего покажем, что любое решение x уравнения (7) есть *неотрицательная* линейная комбинация n векторов:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \text{ и } x_n = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}).$$

Для этой цели запишем разложение:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_{n-1} x_{n-1}.$$

Пусть c — положительное число, превосходящее любое из чисел $|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_{n-1}|$. Имеем:

$$x = (c_1 + c) x_1 + (c_2 + c) x_2 + \ldots + (c_{n-1} + c) x_{n-1} + c x_n,$$

откуда видно, что x есть неотрицательная линейная комбинация векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

Выберем теперь какое-нибудь решение уравнения $L(x) = 1$ и обозначим его x_{n+1}. Мы утверждаем, что набор векторов

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} \tag{8}$$

является фундаментальным набором решений для неравенства (6).

В самом деле, каждый из указанных векторов удовлетворяет неравенству (6). Пусть теперь x' — любое решение этого неравенства; следовательно, $L(x') = \alpha$, где $\alpha \geqslant 0$. Тогда вектор

$$x = x' - \alpha x_{n+1}$$

удовлетворяет уравнению (7), ибо

$$L(x) = L(x') - \alpha L(x_{n+1}) = \alpha - \alpha \cdot 1 = 0.$$

Если теперь записать

$$x' = x + \alpha x_{n+1}$$

и учесть, что вектор x является неотрицательной линейной комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, то станет ясно, что x' представим в виде неотрицательной линейной комбинации векторов (8).

Рассмотрим конкретный пример. Пусть требуется построить фундаментальный набор решений для неравенства

$$-x_1 - 4x_2 - 2x_3 \geqslant 0 \tag{9}$$

с тремя неизвестными.

Прежде всего находим фундаментальный набор решений для уравнения

$$-x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0.$$

Для этой цели переписываем уравнение в виде

$$x_1 = -4x_2 - 2x_3$$

и последовательно полагаем одно из «свободных» неизвестных x_2, x_3 равным 1, а остальные нулю. Получаем такие решения:

$$x_1 = (-4, 1, 0), \quad x_2 = (-2, 0, 1).$$

В качестве x_3 берем теперь вектор

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = (6, -1, -1),$$

наконец, за x_4 принимаем одно из решений уравнения

$$-x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 1,$$

например $x_4 = (-1, 0, 0)$.

Векторы x_1, x_2, x_3, x_4 образуют фундаментальный набор решений для неравенства (9). Общее решение имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{4} k_i x_i = k_1(-4, 1, 0) + k_2(-2, 0, 1) + k_3(6, -1, -1) + k_4(-1, 0, 0)$$

или

$$\begin{aligned} x_1 &= -4k_1 - 2k_2 + 6k_3 - k_4, \\ x_2 &= k_1 - k_3, \\ x_3 &= k_2 - k_3, \end{aligned}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 — произвольные неотрицательные числа.

2. Построим фундаментальный набор решений для системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0 \\ &\ldots \\ x_n &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}.$$

Решением этой системы является, очевидно, любой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с неотрицательными координатами.

В качестве фундаментального набора можно взять набор из векторов:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Действительно, каждый из этих векторов является решением, и любое решение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представимо в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

т. е. в виде неотрицательной линейной комбинации векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

5. Перестройка фундаментального набора решений при добавлении к системе еще одного неравенства. Чтобы научиться строить фундаментальные наборы решений, рассмотрим вначале такую задачу.

Пусть дана однородная система (1) линейных неравенств. Обозначая левые части неравенств через $L_1(x), L_2(x), \ldots, L_m(x)$ соответственно, перепишем систему в виде:

$$\left.\begin{aligned} L_1(x) &\geqslant 0 \\ L_2(x) &\geqslant 0 \\ &\ldots \\ L_m(x) &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Задача. *Предположим, что задан фундаментальный набор решений*

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

для системы (10). *Требуется построить фундаментальный набор решений для системы, полученной добавлением к* (10) *еще одного неравенства*

$$L(x) \geqslant 0. \tag{11}$$

Решения системы (10) — это в точности все неотрицательные линейные комбинации векторов $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Среди этих комбинаций нам нужно выбрать такие, которые удовлетворяли бы также неравенству (11) и, более того, которые составили бы фундаментальный набор решений для системы (10), (11).

По отношению к функции $L(x)$ — левой части неравенства (11) — все векторы $x_1, x_2, \ldots, x_p$ можно разбить на три группы: векторы, для которых $L(x) > 0$, векторы, для которых $L(x) < 0$, и, наконец, векторы, для которых $L(x) = 0$. Векторы первой группы обозначим $x_1^+, x_2^+, \ldots, x_k^+$, векторы второй группы $x_1^-, x_2^-, \ldots, x_l^-$, векторы третьей группы $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0$. Таким образом,

$$x_1^+, \ldots, x_k^+, x_1^-, \ldots, x_l^-, x_1^0, \ldots, x_s^0$$

— это те же самые векторы $x_1, x_2, \ldots, x_p$, но только расположенные, может быть, в другом порядке.

Разумеется, все векторы x_α^+ ($\alpha = 1, \ldots, k$) удовлетворяют неравенству (11). То же самое относится и к x_γ^0 ($\gamma = 1, \ldots, s$). Что же касается векторов x_β^- ($\beta = 1, \ldots, l$), то из них ни один не является решением неравенства (11). Однако из каждой пары

$$x_\alpha^+, \; x_\beta^-$$

(один вектор «плюсовый» и один «минусовый») можно образовать неотрицательную линейную комбинацию

$$ax_\alpha^+ + bx_\beta^- \tag{12}$$

так, чтобы она удовлетворяла условию $L(x) = 0$. Для этого следует взять

$$a = -L(x_\beta^-), \; b = L(x_\alpha^+). \tag{13}$$

Действительно, числа a и b положительны и, кроме того,

$$L(ax_\alpha^+ + bx_\beta^-) = aL(x_\alpha^+) + bL(x_\beta^-) = -L(x_\beta^-)\, L(x_\alpha^+) + \\ + L(x_\alpha^+)\, L(x_\beta^-) = 0.$$

Обозначим вектор (12) с указанными выше значениями a и b через $x_{\alpha\beta}^0$:

$$x_{\alpha\beta}^0 = -L(x_\beta^-)\, x_\alpha^+ + L(x_\alpha^+)\, x_\beta^-. \tag{14}$$

Ответ к поставленной нами задаче дает следующая

Теорема. *Векторы*

$$x_1^+, \ldots, x_k^+, x_1^0, \ldots, x_s^0, x_{11}^0, x_{12}^0, \ldots, x_{kl}^0 \tag{15}$$

(всего здесь $k + s + kl$ векторов) *образуют фундаментальный набор решений для системы* (10), (11).

Чтобы доказать теорему, установим сначала такую лемму.

Лемма. *Любая неотрицательная линейная комбинация векторов x_α^+ и x_β^- может быть представлена как неотрицательная линейная комбинация векторов x_α^+, $x_{\alpha\beta}^0$ или же как неотрицательная линейная комбинация векторов x_β^-, $x_{\alpha\beta}^0$.*

Доказательство леммы. Пусть

$$x = cx_\alpha^+ + dx_\beta^-$$

— неотрицательная линейная комбинация векторов x_α^+ и x_β^-. Рассмотрим наряду с x вектор

$$x_{\alpha\beta}^0 = ax_\alpha^+ + bx_\beta^-,$$

где числа a и b определены формулами (13). Сравним два отношения: $\frac{c}{a}$ и $\frac{d}{b}$.

Если первое больше второго, то, полагая $\frac{d}{b} = \lambda$, $\frac{c}{a} = \lambda + \mu$, где $\mu > 0$, будем иметь:

$$x = (\lambda a + \mu a)x_\alpha^+ + \lambda b x_\beta^- = \lambda x_{\alpha\beta}^0 + \mu a x_\alpha^+,$$

т. е. вектор x представим в виде неотрицательной линейной комбинации x_α^+ и $x_{\alpha\beta}^0$. Если указанные выше отношения равны, то $x = \lambda x_{\alpha\beta}^0$. Наконец, если $\frac{c}{a} < \frac{d}{b}$, то, полагая

$\frac{c}{a}=\lambda$, $\frac{d}{b}=\lambda+\mu$, где $\mu>0$, получим:

$$x=\lambda x^0_{\alpha\beta}+\mu x^-_\beta.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что каждый из векторов (15) удовлетворяет системе (10), (11). Поэтому, чтобы доказать теорему, нам остается лишь проверить, что если какой-либо вектор x является решением системы (10), (11), то он представим в виде неотрицательной линейной комбинации векторов (15).

Будучи решением системы (10), вектор x представляется в виде неотрицательной линейной комбинации ее фундаментальных векторов $x_1, x_2, \ldots, x_p$:

$$x=a_1x_1^+ +\ldots+a_kx_k^+ +b_1x_1^- +\ldots+b_lx_l^- +c_1x_1^0+\ldots+c_sx_s^0, \tag{16}$$

где все коэффициенты $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_s$ неотрицательны.

Если все числа $b_1, \ldots, b_l$ равны нулю, то, очевидно, доказывать нечего. Предположим поэтому, что среди указанных чисел имеются строго положительные. Заметим что тогда среди чисел $a_1, \ldots, a_k$ тоже имеются строго положительные: в противном случае получилось бы

$$L(x)=b_1L(x_1^-)+\ldots+b_lL(x_l^-)+c_1L(x_1^0)+\ldots+c_sL(x_s^0)<0,$$

что невозможно, так как x удовлетворяет неравенству (11).

Предположим для определенности, что $a_1>0$, $b_1>0$. Пользуясь леммой, можно заменить сумму $a_1x_1^+ + b_1x_1^-$ неотрицательной линейной комбинацией векторов x_1^+, x_{11}^0 или же векторов x_1^-, x_{11}^0. Если в выражении (16) для вектора x произвести такую замену, то общее число отличных от нуля коэффициентов при $x_1^+, \ldots, x_k^+, x_1^-, \ldots, x_l^-$ уменьшится по крайней мере на 1. Если при этом окажется, что во вновь полученном выражении для x не все коэффициенты при $x_1^-, \ldots, x_l^-$ равны нулю, то снова заменим одну из сумм вида $ax_\alpha^+ + bx_\beta^-$ неотрицательной линейной комбинацией векторов x_α^+, $x_{\alpha\beta}^0$ или же векторов x_β^-, $x_{\alpha\beta}^0$; в результате число отличных от нуля коэффициентов при $x_1^+, \ldots, x_k^+, x_1^-, \ldots, x_l^-$ уменьшится еще по крайней мере на 1. Так будет продолжаться до тех пор, пока для вектора x не получится выражение, в котором все коэффициенты при $x_1^-, \ldots, x_l^-$ будут равны нулю. Мы придем тогда к равенству вида:

$$x=a_1'x_1^+ +\ldots+a_k'x_k^+ +\sum_{\alpha,\beta} d_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta}^0+c_1x_1^0+\ldots+c_sx_s^0,$$

где все коэффициенты справа больше либо равны нулю. Но это и есть требуемое представление для x. Теорема доказана.

6. Существование и способ построения фундаментального набора решений. Рассмотрим произвольную систему однородных линейных неравенств. Для первого неравенства системы можно (способом, описанным в пункте 4) построить фундаментальный набор решений. Присоединив к первому неравенству второе, можно, опираясь на теорему пункта 5, построить фундаментальный набор решений для системы, состоящей из первых двух неравенств. Далее присоединяем третье неравенство и т. д., пока не получим фундаментальный набор решений для всей исходной системы неравенств. *Этим доказано существование и одновременно указан способ построений фундаментального набора решений.*

Разумеется, если в данной системе неравенств имеется подсистема, для которой сразу можно указать фундаментальный набор решений, то в качестве исходного пункта следует взять эту подсистему; присоединяя к ней последовательно остальные неравенства, мы после ряда шагов построим искомый фундаментальный набор.

Пример. Для системы

$$\left.\begin{aligned} L_1(x) &\equiv -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \geqslant 0 \\ L_2(x) &\equiv 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

требуется найти все неотрицательные решения, т. е. все решения, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0 \\ x_3 &\geqslant 0 \\ x_4 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

Иначе говоря, нужно найти общее решение системы (17), (18).

Мы уже знаем, что для системы (18) в качестве фундаментального набора можно взять набор из векторов:

$$x_1 = (1, 0, 0, 0), \quad x_2 = (0, 1, 0, 0), \quad x_3 = (0, 0, 1, 0), \quad x_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Присоединим к системе (18) первое из неравенств (17) и для полученной таким образом системы построим фундаментальный набор решений, используя теорему пункта 5. Для удобства вычислений составим такую таблицу:

					$L_1(x)$
x_1	1	0	0	0	−3
x_2	0	1	0	0	−4
x_3	0	0	1	0	5
x_4	0	0	0	1	−6

В каждой строке таблицы указан один из фундаментальных векторов для системы (18), а также значение функции $L_1(x)$ на этом векторе. Из таблицы видно, что единственным вектором типа x_α^+ является x_3, векторы типа x_β^- суть x_1, x_2, x_4, а векторов типа x_γ^0 в данном случае нет.

Находим векторы типа $x_{\alpha\beta}^0$. Ими будут:

$$\begin{aligned} x_{31}^0 &= 3x_3 + 5x_1 = (5, 0, 3, 0), \\ x_{32}^0 &= 4x_3 + 5x_2 = (0, 5, 4, 0), \\ x_{34}^0 &= 6x_3 + 5x_4 = (0, 0, 6, 5). \end{aligned}$$

Чтобы не усложнять дальнейших записей, обозначим эти векторы y_1, y_2, y_4 (соответственно), а вместо x_3 будем писать y_3.

Векторы y_3, y_1, y_2, y_4 образуют фундаментальный набор решений для системы, состоящей из (18) и первого из неравенств (17).

Присоединяем к этой системе второе из неравенств (17) и составляем следующую таблицу:

					$L_2(y)$
y_3	0	0	1	0	—3
y_1	5	0	3	0	1
y_2	0	5	4	0	3
y_4	0	0	6	5	—13

Из этой таблицы видно, что роль векторов y_α^+ теперь играют y_1, y_2, роль векторов y_β^- играют y_3, y_4, а векторов типа y_γ^0 нет.

Находим векторы типа $y_{\alpha\beta}^0$:

$$
\begin{aligned}
y_{13}^0 &= 3y_1 + y_3 = (15,\ 0,\ 10,\ 0),\\
y_{14}^0 &= 13y_1 + y_4 = (65,\ 0,\ 45,\ 5),\\
y_{23}^0 &= 3y_2 + 3y_3 = (0,\ 15,\ 15,\ 0),\\
y_{24}^0 &= 13y_2 + 3y_4 = (0,\ 65,\ 70,\ 15).
\end{aligned}
$$

Векторы y_1, y_2, y_{13}^0, y_{14}^0, y_{23}^0, y_{24}^0 образуют фундаментальный набор решений для системы (17), (18). Общее решение имеет вид:

$$x = ay_1 + by_2 + cy_{13}^0 + dy_{14}^0 + ey_{23}^0 + fy_{24}^0,$$

или, если положить $5c = c'$, $5d = d'$, $5e = e'$, $5f = f'$,

$$
\begin{aligned}
x = a\,(5,\ 0,\ 3,\ 0) + b\,(0,\ 5,\ 4,\ 0) + c'\,(3,\ 0,\ 2,\ 0) +\\
+ d'\,(13,\ 0,\ 9,\ 1) + e'\,(0,\ 3,\ 3,\ 0) + f'\,(0,\ 13,\ 14,\ 3),
\end{aligned}
$$

где a, b, c', d', e', f' — произвольные неотрицательные числа.

Глава IV

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

В предыдущей главе матрицы выступали в основном как удобное средство для исследования и решения систем линейных уравнений. В действительности круг вопросов, в которых находит применение аппарат теории матриц, значительно шире. Читатель сможет убедиться в этом при изучении дальнейших разделов алгебры.

По-настоящему содержательное изучение матриц начинается с того момента, когда для них вводится операция *умножения*, в ряде отношений сходная с умножением чисел. Умножение матриц является исходным пунктом обширной теории — *алгебры матриц*, играющей важную роль в различных разделах математики и ее приложениях.

Кроме операций над матрицами, в этой главе излагается также *теория определителей*. Аппарат теории определителей оказывается полезным во многих вопросах, и прежде всего там, где рассматриваются системы линейных уравнений с одинаковыми числом уравнений и неизвестных — случай, для практики наиболее важный.

§ 1. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

1. Сложение матриц. Условимся называть две матрицы *однотипными*, если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов. Вообще, тип матрицы определяется парой чисел (m, n), где m — число строк, а n — число столбцов в данной матрице.

Пусть A и B — две однотипные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Их суммой называется матрица

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря, чтобы сложить матрицы A и B, надо сложить их элементы, стоящие на одинаковых местах. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей* (данного типа). Обозначим нулевую матрицу $\mathbf{0}$ (строго говоря, следовало бы писать $\mathbf{0}_{m,n}$, указывая тип матрицы). Очевидно,

$$A + \mathbf{0} = A$$

для любой матрицы A, однотипной с $\mathbf{0}$.

2. Умножение матрицы на число. Умножить матрицу A на число k означает, по определению, умножить все ее элементы на это число:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например,

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$k(A + B) = kA + kB.$$

Каждую матрицу A типа (m, n) можно рассматривать как вектор пространства $\mathbf{R}^{mn}$. Координатами этого вектора являются элементы матрицы A, взятые в определенной последовательности, например,

$$\underbrace{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}}_{\text{1-я строка матрицы } A}, \quad \underbrace{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}}_{\text{2-я строка}}, \quad \dots, \quad \underbrace{a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}}_{m\text{-я строка}}.$$

При истолковании матрицы как вектора (соответствующей размерности) сложение матриц превращается, очевидно, в сложение векторов, а умножение матрицы на число — в умножение вектора на число. Таким образом, множество всех матриц типа (m, n) с определенными выше операциями $A + B$ и kA можно рассматривать как арифметическое векторное пространство размерности mn.

3. Умножение матриц. Это весьма своеобразная операция, которая каждым двум матрицам A и B, связанным между собой простым условием (число столбцов в A равно числу строк в B), сопоставляет некоторую третью матрицу C.

Пусть заданы матрица A типа (m, n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и матрица B типа (n, k)

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Число n столбцов матрицы A по условию совпадает с числом n строк матрицы B, другими словами, длина строки матрицы A совпадает с высотой столбца матрицы B. *Произведением* AB *называется матрица* C *типа* (m, k):

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

элементы которой находятся по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Правило для нахождения c_{ij} запомнить совсем нетрудно: берутся i-я строка матрицы A и j-й столбец матрицы B:

$$\begin{matrix} & b_{1j} \\ & b_{2j} \\ a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in} & \vdots \\ & b_{nj}, \end{matrix}$$

затем каждый элемент строки умножается на соответствующий элемент столбца и все такие произведения складываются. Поскольку строки матрицы A имеют номера от 1 до m, а столбцы матрицы B — номера от 1 до k, то в выражении c_{ij} индекс i может изменяться от 1 до m, а индекс j от 1 до k; отсюда видно, что матрица C будет типа (m, k).

Для большей наглядности составим таблицу с указанием числа строк и столбцов в матрицах A, B и AB:

	A	B	AB
Число строк	m	n	m
Число столбцов	n	k	k

(Запомнить эту таблицу можно так: $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{k} = \frac{m}{k}$.)

П р и м е р ы.

1. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 0+(-2)\cdot 0 & 3(-1)+(-2)\cdot 2\\ 1\cdot 0+4\cdot 0 & 1(-1)+4\cdot 2\end{pmatrix}=$
$$=\begin{pmatrix}0 & -7\\ 0 & 7\end{pmatrix}.$$

2. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+1\cdot 1+(-3)\cdot 1\\ 1\cdot 2+2\cdot 1+(-4)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$

Вопросы и упражнения

1. При каком условии имеют смысл: произведение AB? оба произведения AB и BA? произведение AA (квадрат матрицы A)?

2. Найти матрицу $A^2 - 6A$, где $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

3. Доказать, что:

a) если в матрице A поменять местами какие-либо две строки, то это же самое произойдет и с матрицей AB;

b) если в матрице A поменять местами два столбца, а в матрице B — две строки с теми же номерами, то произведение AB не изменится.

4. Доказать, что каждый столбец матрицы AB является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Вывести отсюда, что ранг $AB \leqslant$ ранг A. Аналогично доказать, что ранг $AB \leqslant$ ранг B.

§ 2. СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

1. Невыполнение переместительного закона. Полезно сопоставить умножение матриц с умножением чисел. Мы знаем, что для чисел справедливо равенство

$$a\cdot b=b\cdot a,$$

выражающее переместительный закон умножения. Будет ли то же самое верно для матриц? Вообще говоря, нет.

Рассмотрим две матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Поскольку длина строки в A совпадает с высотой столбца в B, произведение AB существует. В то же время произведение BA вообще не имеет смысла.

Впрочем, можно указать и такие пары матриц A, B, для которых определены оба произведения AB и BA, однако $AB \neq BA$. Например,

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

в то же время

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, умножение матриц не обладает переместительным свойством.

2. Сочетательный закон умножения. Покажем, что умножение матриц подчиняется сочетательному закону, т. е.

$$(AB)C = A(BC). \tag{1}$$

В самом деле, пусть A и B — две матрицы, для которых имеет смысл произведение AB, и C — третья матрица, для которой имеет смысл выражение $(AB)C$:

	A	B	AB	C	$(AB)C$
Число строк	m	n	m	p	m
Число столбцов	n	p	p	q	q

Тогда, как легко видеть, определено также и произведение $A(BC)$. Наша цель — доказать равенство (1).

Обозначим матрицу AB для удобства через S, а матрицу BC — через T. Требуется доказать, что $SC = AT$.

Элемент матрицы SC, расположенный в i-й строке и в j-м столбце, равен

$$\sum_{\beta=1}^{p} s_{i\beta} c_{\beta j} = \sum_{\beta=1}^{p} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} \right) c_{\beta j} = \sum a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j}. \tag{2}$$

Справа получилась сумма слагаемых вида $a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j}$, где индекс α пробегает все значения от 1 до n, а индекс β — все значения от 1 до p.

Элемент матрицы AT, расположенный в том же месте, равен

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} t_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^{p} b_{\alpha\beta} c_{\beta j} \right) = \sum a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j},$$

справа получилась в точности та же сумма, что и в (2). Таким образом, элементы, стоящие на одинаковых местах в матрицах SC и AT, совпадают. Следовательно, $SC = AT$, что и требовалось доказать.

Сочетательный закон умножения дает нам право в дальнейшем писать ABC, не уточняя, какое из двух произведений $(AB)C$ или $A(BC)$ имеется в виду под этой записью.

3. Распределительный закон. Докажем для матриц справедливость распределительного закона, связывающего умножение со сложением. Причем, поскольку умножение матриц не обладает переместительным свойством, имеются два распределительных закона:

$$A(B+C)=AB+AC$$

и

$$(B+C)A=BA+CA.$$

Докажем первое из этих равенств (второе проверяется аналогично). При этом, разумеется, будем считать, что матрицы B и C одного типа и число столбцов в матрице A совпадает с числом строк в матрице B.

Элемент матрицы $A(B+C)$, расположенный в i-й строке и j-м столбце, равен

$$a_{i1}(b_{1j}+c_{1j})+a_{i2}(b_{2j}+c_{2j})+\ldots+a_{in}(b_{nj}+c_{nj}),$$

где n — число столбцов в матрице A (равное по условию числу строк в матрицах B и C). Раскрывая скобки, получаем:

$$(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj})+(a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\ldots+a_{in}c_{nj});$$

первая сумма представляет собой элемент матрицы AB, стоящий в i-й строке и j-м столбце, вторая — аналогичный элемент матрицы AC.

§ 3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Более глубокая аналогия между умножением матриц и умножением чисел обнаруживается при рассмотрении *квадратных* матриц. Условимся, что все рассматриваемые ниже матрицы являются квадратными и имеют один и тот же порядок (количество строк или столбцов) n. При этом условии произведение AB всегда имеет смысл.

1. Единичная матрица. Среди обычных чисел число 1 выделяется тем, что его произведение с любым числом a есть снова a:

$$a\cdot 1=1\cdot a=a.$$

Оказывается, что и среди матриц рассматриваемого вида существует некоторая специальная матрица, обладающая аналогичным свойством. Эта матрица имеет вид

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}$$

и называется *единичной* матрицей (данного порядка n). Легко проверить, что $AE=EA=A$, какова бы ни была матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

В самом деле, элемент матрицы AE, расположенный в i-й строке и j-м столбце, равен

$$a_{i1}\cdot 0+\ldots+a_{i,\,j-1}\cdot 0+a_{ij}\cdot 1+a_{i,\,j+1}\cdot 0+\ldots+a_{in}\cdot 0=a_{ij},$$

откуда следует $AE = A$. Равенство $EA = A$ проверяется аналогично.

2. Обратная матрица. Для каждого числа a, отличного от нуля, существует обратное число a^{-1}, дающее в произведении с a единицу:

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Оказывается, что аналогичное свойство справедливо и в отношении матриц, причем роль условия $a \neq 0$ играет условие: строки матрицы A линейно независимы.

Примем такие определения.

1. Матрица A называется *невырожденной*, если система ее строк линейно независима, и *вырожденной*, если между ее строками существует линейная зависимость.

2. Матрица B называется *обратной* по отношению к матрице A, если

$$AB = E.$$

Напомним еще раз, что все рассматриваемые матрицы предполагаются квадратными.

Обратная матрица обозначается A^{-1}. Итак,

$$AA^{-1} = E.$$

Что касается произведения $A^{-1}A$, то мы не требуем заранее, чтобы оно равнялось E; равенство $A^{-1}A = E$ *будет доказано.*

3. Отсутствие обратной матрицы в случае, когда исходная матрица A вырожденная. Установим следующий факт.

Для вырожденной матрицы A не существует обратной.

Сначала докажем такую лемму.

Лемма. *Если $C = AB$ и между строками матрицы A существует линейная зависимость, то в точности такая же зависимость имеет место для строк матрицы C.*

Доказательство. Предположим, что между строками $a_1, a_2, \ldots, a_n$ матрицы A имеется линейная зависимость, т. е. справедливо равенство

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n = 0, \tag{1}$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — некоторые числа, не равные одновременно нулю. Докажем, что точно такое же равенство справедливо для строк матрицы C, т. е. что

$$k_1c_1 + k_2c_2 + \ldots + k_nc_n = 0. \tag{2}$$

Для этой цели заметим, что равенство (1) между векторами можно рассматривать как равенство между *матрицами* (состоящими каждая из одной строки).

Умножим обе части этого равенства на матрицу b, состоящую из одного столбца. Мы получим:

$$k_1(a_1b) + k_2(a_2b) + \ldots + k_n(a_nb) = 0.$$

Если в качестве b взять j-й столбец матрицы B, то $a_i b$ будет не что иное, как элемент c_{ij} матрицы C. Следовательно, при каждом $j = 1, 2, \ldots, n$ имеет место равенство

$$k_1 c_{1j} + k_2 c_{2j} + \ldots + k_n c_{nj} = 0.$$

Но это означает, что справедливо равенство (2).

Лемма доказана.

Теперь уже совсем нетрудно установить нужный нам результат: если матрица A вырожденная, то для нее не существует обратной. Доказательство проводится в нескольких словах. Если бы матрица A^{-1} существовала, то мы имели бы $AA^{-1} = E$. Поскольку матрица A по условию вырожденная, между ее строками имеется линейная зависимость; но тогда линейная зависимость должна существовать и между строками матрицы E (в силу леммы). Между тем строки матрицы E линейно независимы, ибо их линейная комбинация

$$c_1 (1, 0, \ldots, 0) + c_2 (0, 1, \ldots, 0) + \ldots + c_n (0, 0, \ldots, 1)$$

есть вектор

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

который будет нулевым лишь при условии

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что для вырожденной матрицы A обратная не существует.

Вопросы и упражнения

1. Какая матрица называется вырожденной? Почему вырожденность матрицы A эквивалентна условию ранг $A < n$ (где n — порядок матрицы A)?

2. Доказать, исходя из леммы пункта 3, что ранг $AB \leqslant$ ранг A.

3. Сформулировать и доказать лемму, аналогичную лемме пункта 3, где шла бы речь о столбцах, а не о строках. Вывести из нее, что ранг $AB \leqslant$ ранг B.

§ 4. НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ A^{-1} ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЫ A

В этом параграфе мы докажем, что если матрица A невырожденная, то обратная ей матрица существует, и укажем один из способов нахождения матрицы A^{-1}.

1. Строчные преобразования и лемма о приведении невырожденной матрицы к единичной. Следующие преобразования над матрицей условимся называть *строчными*:

α) перестановку строк;

β) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;

γ) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на какое-либо число.

Лемма. *Любую невырожденную матрицу* A *с помощью строчных преобразований можно привести к единичной матрице* E. *Обратно, если некоторая матрица* A *приводится к матрице* E *с помощью строчных преобразований, то эта матрица невырожденная.*

Доказательство. Пусть дана невырожденная матрица A. Прежде всего заметим, что в этой матрице не может быть нулевых столбцов. В самом деле, если бы имелся хотя бы один нулевой столбец, то ранг матрицы A был бы меньше n, что противоречит условию (матрица A невырожденная).

Итак, в каждом столбце матрицы A имеется хотя бы один не равный нулю элемент. Пользуясь этим и переставляя, если нужно, строки матрицы, можно добиться того, чтобы было $a_{11} \neq 0$. Умножив тогда первую строку на число $\frac{1}{a_{11}}$, мы превращаем a_{11} в единицу; затем с помощью нескольких строчных преобразований типа γ) обращаем в нули все остальные элементы первого столбца. В результате получаем матрицу A' вида:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix},$$

которая будет невырожденной в силу невырожденности A; действительно, каждое из преобразований α), β), γ) не меняет ранга матрицы и потому переводит невырожденную матрицу снова в невырожденную.

Рассмотрим в матрице A' подматрицу, обведенную пунктирной линией. Поскольку и она является невырожденной (линейная зависимость между строками этой матрицы означала бы линейную зависимость между строками матрицы A), то хотя бы один из элементов ее первого столбца отличен от нуля. Путем соответствующей перестановки строк матрицы A' добиваемся того, чтобы было $a'_{22} \neq 0$ (причем первую строку уже не трогаем); далее обращаем a'_{22} в единицу (с помощью преобразования β), а все остальные элементы второго столбца — в нули (с помощью нескольких преобразований γ). В результате получаем матрицу A'' вида:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & \dots & a''_{1n} \\ 0 & 1 & a''_{23} & \dots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \dots & a''_{nn} \end{pmatrix}.$$

И так далее. После n шагов получим единичную матрицу E. Тем самым в одну сторону лемма доказана.

Обратно, пусть матрица A такова, что с помощью строчных преобразований ее можно привести к единичной матрице E. Поскольку ни одно из строчных преобразований не меняет, как уже говорилось, ранга матрицы, то возможность приведения A к E означает, что ранг A равен рангу E, т. е. n. Отсюда следует, что матрица A невырожденная. Лемма доказана полностью.

2. Строчное преобразование как умножение слева на некоторую матрицу. Прежде всего сделаем такое замечание. Пусть S обозначает какую-либо матрицу, у которой один из элементов равен 1, а остальные — нулю; будем считать, что элемент, равный 1, расположен в i-й строке и j-м столбце. Рассмотрим произведение SA, где A — произвольная матрица. Непосредственная проверка показывает, что матрица SA устроена следующим образом: ее i-я строка совпадает с j-й строкой матрицы A, а все остальные строки состоят из нулей.

Рассмотрим теперь матрицы S', S'', S''' следующего вида:

$$S' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1\ddots1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1\ddots1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1\ddots1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$S'' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & i & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1\ddots1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1\ddots1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$S''' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \alpha & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для пояснения укажем, что в S' все элементы равны 0, за исключением $n-2$ элементов на главной диагонали* и еще двух элементов вне диагонали; в S'' все элементы главной диагонали рав-

---

* Главной диагональю в квадратной матрице A называется диагональ, идущая из левого верхнего угла в правый нижний (т. е. от a_{11} к a_{nn}).

ны 1, кроме одного, который равен некоторому числу α (остальные элементы — нули); в S''' все элементы главной диагонали равны 1 и, кроме того, имеется элемент, равный α (остальные элементы — нули).

Исходя из замечания, сделанного в начале пункта, легко установить, что:

матрица $S'A$ получается из матрицы A перестановкой i-й и j-й строк;

матрица $S''A$ получается из A умножением i-й строки на число α;

матрица $S'''A$ получается из A прибавлением к i-й строке j-й строки, умноженной на α.

Проверку этих фактов предоставляем читателю.

Таким образом, *любое строчное преобразование над матрицей A дает тот же эффект, что умножение матрицы A слева на некоторую вспомогательную матрицу* (типа S', S'' или S''').

Учитывая этот результат, мы можем теперь из леммы, доказанной в пункте 1, извлечь такое следствие.

Если невырожденную матрицу A умножить слева последовательно на некоторые матрицы S_1, S_2, ..., S_p, то получим единичную матрицу E:

$$S_p(\ldots(S_2(S_1A))\ldots) = E.$$

Здесь S_1, S_2, ..., S_p — это матрицы типа S', S'', S''', которые отвечают строчным преобразованиям над матрицей A, приводящим ее к единичной матрице E.

Поскольку умножение матриц обладает сочетательным свойством, можно в последнем равенстве опустить скобки и записать просто

$$S_p \ldots S_2 S_1 A = E.$$

3. Существование обратной матрицы. Обозначив произведение $S_p \ldots S_2S_1$ через B, перепишем последнее равенство в виде:

$$BA = E. \tag{1}$$

Отсюда видно, что любая невырожденная матрица A является обратной для некоторой матрицы B.

Так как матрица B тоже невырожденная (в противном случае для нее не существовало бы обратной), то и она является обратной для некоторой матрицы C:

$$CB = E. \tag{2}$$

Умножив обе части этого равенства справа на матрицу A, получим $(CB)A = EA$ или $C(BA) = A$; отсюда, в силу (1), следует $C = A$. Возвращаясь к (2), находим теперь

$$AB = E. \tag{3}$$

Тем самым *матрица B есть искомая обратная матрица для A.*

Итак, если матрица A невырожденная, то обратная к ней существует и равна $S_p \ldots S_2S_1$:

$$A^{-1} = S_p \ldots S_2S_1. \tag{4}$$

Заметим попутно, что, совершив переход от (1) к (3), мы установили следующий факт: *если матрица A есть обратная для B, то B есть обратная для A.*

4. Практический способ нахождения обратной матрицы. Умножив обе части равенства (4) на матрицу E, получим:

$$A^{-1} = S_p \ldots S_2S_1E.$$

Отсюда видно, что *если к матрице E применить ту же самую цепочку строчных преобразований, с помощью которой матрица A приводится к E, то получим матрицу A^{-1}.*

Одновременное применение одних и тех же преобразований к матрицам E и A можно обеспечить, например, таким образом: записать матрицу E слева или справа от A и выполнять преобразования над строками «сдвоенной» матрицы (имеющей n строк и $2n$ столбцов). Исходя из сказанного выше, приходим к следующему способу нахождения матрицы A^{-1} для невырожденной матрицы A.

Приписываем к матрице A (слева или справа) *единичную матрицу E. Далее с помощью строчных преобразований над всей составной матрицей приводим матрицу A к единичной матрице E. Тогда на месте первоначально приписанной матрицы E оказывается матрица A^{-1}.*

5. Примеры на нахождение обратной матрицы. Сделаем сначала одно замечание.

Перед тем как приступить к нахождению матрицы A^{-1}, нет необходимости специально проверять, является ли матрица A невырожденной, т. е. равен ли n (порядку матрицы A) ее ранг. Если окажется, что матрицу A можно преобразовать к единичной матрице E, то этот факт уже сам по себе будет означать невырожденность матрицы A (см. второе утверждение леммы пункта 1).

1. Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поступая, как указано выше, пишем матрицу

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

и далее с помощью строчных преобразований над ней приводим левую «половину» к единичной матрице E.

После первого шага получаем матрицу

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(мы поменяли местами первую и вторую строки и затем к третьей строке прибавили первую, а из второй строки вычли удвоенную первую); после второго шага — матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right)$$

(поменяли местами вторую и третью строки и затем к первой строке прибавили вторую и из третьей вычли учетверенную вторую); наконец, после третьего шага — матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

(прибавили к первой и второй строкам третью и затем умножили третью строку на -1). Слева от пунктирной черты теперь стоит матрица E; значит, справа должна стоять матрица A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Как показывает ход решения, цель каждого шага заключается в том, чтобы сделать очередной столбец матрицы, стоящей слева от пунктирной черты, таким же, как у матрицы E.

2. Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ (матрица порядка } n+1).$$

Пишем матрицу

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

В данном случае приведение левой половины (т. е. матрицы A) к E достигается довольно просто: из первой строки нужно вычесть вторую, умноженную на a, затем из второй вычесть третью, умноженную на a, и т. д.; наконец, из предпоследней вычесть последнюю, умноженную на a. Выполнив эти преобразования, получим:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Следовательно:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Единственность обратной матрицы. Итак, мы знаем, что для невырожденной матрицы A всегда существует обратная матрица. Однако остается еще невыясненным, *сколько* обратных матриц может иметь данная матрица A. Докажем, что *только одну*. В самом деле, пусть B и B' — две обратные матрицы для A, т. е.

$$AB = E \text{ и } AB' = E. \qquad (5)$$

Ранее было доказано, что если матрица B — обратная для A, то и матрица A — обратная для B. Следовательно, BA также равно E. Умножив обе части второго из равенств (5) слева на B, получим: $BAB' = B$ или $B' = B$, что и требовалось доказать.

Вопросы и упражнения

1. Какие преобразования над матрицей называются строчными? Доказать, что строчные преобразования не меняют ранга матрицы.

2. Наряду со строчными преобразованиями над матрицей A можно рассматривать столбцевые преобразования, которые определяются аналогично. Напишите матрицы T', T'', T''' (аналогичные S', S'', S'''), умножение которых на матрицу A справа дает тот же эффект, что и соответствующее столбцевое преобразование над A.

3. Если указанный выше способ нахождения матрицы A^{-1} применить к вырожденной матрице A, какое возникнет препятствие?

§ 5. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

1. Определители второго порядка. С понятием определителя 2-го порядка читатель уже знаком. Если дана квадратная матрица 2-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

то ее *определителем* (или просто определителем 2-го порядка) называется число

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы (1) обозначают:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

К определителям 2-го порядка мы приходим, решая системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Если дана система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}\right\},$$

причем определитель (2), составленный из коэффициентов при неизвестных (он называется определителем системы), не равен нулю, то, как известно, система имеет единственное решение, которое дается формулами:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

или в более сжатой форме:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где через Δ обозначен определитель системы, а через Δ_1 и Δ_2 — определители, получаемые из него заменой первого, соответственно второго, столбца столбцом свободных членов.

Рассматриваемое предложение представляет собой правило Крамера для системы двух уравнений с двумя неизвестными. Правило переносится и на более общий случай, т. е. на случай систем n уравнений с n неизвестными. Этот факт будет установлен позже, когда будет введено понятие определителя n-го порядка и установлены его основные свойства.

2. Определители произвольного порядка n. Каждой квадратной матрице A порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

мы сопоставляем некоторое число, которое называем *определителем* этой матрицы и обозначаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

или просто $|A|$.

Для определения числа $|A|$ воспользуемся индукцией по n:

1. При $n = 1$ матрица A состоит из единственного числа: $A = (a_{11})$. В этом случае мы полагаем

$$|A| = a_{11}.$$

2. Пусть для матриц порядка $n-1$ определитель уже определен. Рассмотрим какую-либо матрицу A порядка n. Обозначим через M_{ij} определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием ее i-й строки и j-го столбца. Например, если дана матрица 3-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то M_{32} есть определитель матрицы 2-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

По определению положим для матрицы A порядка n

$$|A| = \frac{1}{n} \sum a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}, \tag{5}$$

где сумма распространяется на все элементы a_{ij} матрицы A.

Определители матриц, имеющих порядок n, называются *определителями n-го порядка.*

Элементы матрицы A называются также элементами ее определителя. Соответственно этому говорят, что определитель (4) *составлен из элементов* $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$.

Строки и столбцы матрицы A мы будем также называть строками и столбцами определителя $|A|$.

Определитель M_{ij}, полученный вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} данного определителя, называется *минором элемента* a_{ij} в данном определителе. Например, в определителе третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

минор M_{32} есть определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Пример. Выразим определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

через элементы этой матрицы.

В данном случае

$$M_{11} = a_{22},\ M_{12} = a_{21},\ M_{21} = a_{12},\ M_{22} = a_{11},$$

поэтому согласно формуле (5) будем иметь:

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{12} + a_{21}(-1)^{2+1}a_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}a_{11}\right) =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Итак, получилось уже знакомое нам выражение для определителя второго порядка.

Введем еще несколько определений.

Число $(-1)^{i+j}M_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ij} в данном определителе и обозначается A_{ij}. Итак, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Например, $A_{13} = M_{13}$, $A_{23} = -M_{23}$.

Используя алгебраические дополнения, можно записать выражение (5) для определителя в более обозримой форме:

$$|A| = \frac{1}{n}\sum a_{ij}A_{ij}.$$

Пусть теперь i — любое из чисел 1, 2, ..., n. Условимся называть сумму произведений элементов i-й строки (i-го столбца) данного определителя на их алгебраические дополнения *i-й строчной* (*i-й столбцевой*) *суммой* определителя и обозначать L_i (H_i). Например:

$$L_1 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} =$$
$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n},$$
$$H_2 = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{n2}A_{n2} =$$
$$= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - \ldots + a_{n2}(-1)^{n+2}M_{12}.$$

Из формулы (5) для определителя n-го порядка следует, что определитель равен среднему арифметическому строчных (столбцевых) сумм:

$$|A| = \frac{L_1 + L_2 + \ldots + L_n}{n} = \frac{H_1 + H_2 + \ldots + H_n}{n}.$$

В заключение этого параграфа сделаем следующее замечание. Формула (5) сводит вычисление определителя n-го порядка к вычислению ряда определителей $(n-1)$-го порядка. Каждый из них, в свою очередь, выражается через определители порядка $n-2$. И так далее. В итоге нахождение исходного определителя сводится к нахождению большого числа определителей 2-го порядка или, если угодно, даже к нахождению ряда определителей 1-го порядка. Очевидно, такой способ вычисления определителей n-го порядка практически малоэффективен. В следующем параграфе мы установим ряд общих свойств определителей; эти свойства позволят нам дальше вывести простые и удобные способы для вычисления определителей произвольного порядка n.

§ 6. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Приводимые ниже свойства определителей формулируются одинаковым образом для строк и столбцов определителя. Ввиду полной аналогии между этими случаями мы ограничимся в доказательствах случаем строк. Доказательство каждого свойства будем вести индукцией по числу n — порядку определителя.

Напомним, что через L_i мы обозначаем i-ю строчную сумму, а через H_i — i-ю столбцевую сумму определителя.

Свойство 1. *При умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) определителя на некоторое число определитель умножается на это число.*

При $n = 2$ свойство 1 проверяется непосредственно. Например,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11} \cdot a_{22} - ka_{12} \cdot a_{21} = k\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Предположим теперь, что свойство 1 верно для определителей порядка $< n$; покажем тогда, что оно выполняется для определителей порядка n. Пусть для определенности первая строка определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

умножается на число k. В результате этого получается определитель

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Миноры $\tilde{M}_{1j}$ элементов первой строки определителя $\tilde{\Delta}$ совпадают, очевидно, с минорами M_{1j} определителя Δ:

$$\tilde{M}_{1j} = M_{1j}. \tag{1}$$

Миноры остальных элементов в $\tilde{\Delta}$ получаются из соответствующих миноров в Δ умножением элементов первой строки на k, поэтому, в силу предположения индукции, имеем при $i > 1$:

$$\tilde{M}_{ij} = k\,M_{ij}. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) очевидным образом вытекает:

$$\tilde{A}_{1j} = A_{1j}$$

и

$$\tilde{A}_{ij} = k\,A_{ij} \text{ при } i > 1.$$

Следовательно,

$$\widetilde{L}_1 = ka_{11}\cdot\widetilde{A}_{11} + \ldots + ka_{1n}\widetilde{A}_{1n} = ka_{11}A_{11} + \ldots + ka_{1n}A_{1n} = kL_1$$

и при $i > 1$

$$\widetilde{L}_i = a_{i1}\widetilde{A}_{i1} + \ldots + a_{in}\widetilde{A}_{in} = a_{i1}k\,A_{i1} + \ldots + a_{in}k\,A_{in} = kL_i.$$

Теперь находим, что

$$\widetilde{\Delta} = \frac{1}{n}(\widetilde{L}_1 + \widetilde{L}_2 + \ldots + \widetilde{L}_n) = \frac{1}{n}(kL_1 + kL_2 + \ldots + kL_n) = k\Delta.$$

Свойство 1 доказано.

Прежде чем формулировать следующее свойство определителей, заметим, что каждая строка определителя порядка n может рассматриваться как арифметический вектор $\boldsymbol{a}$ пространства $\mathbf{R}^{(n)}$.

Свойство 2. *Определитель* Δ *со строками* (*столбцами*)

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_i' + \boldsymbol{a}_i'', \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$$

равен сумме определителей Δ' и Δ'' соответственно со строками (столбцами)

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_i', \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$$

и

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_i'', \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n.$$

При $n = 2$ свойство 2 проверяется непосредственно. Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11}' + a_{11}'' & a_{12}' + a_{12}'' \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}' + a_{11}'')\,a_{22} - (a_{12}' + a_{12}'')\,a_{21} =$$

$$= (a_{11}'a_{22} - a_{12}'a_{21}) + (a_{11}''a_{22} - a_{12}''a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Предположим теперь, что свойство 2 справедливо для определителей порядка, меньшего чем n; докажем тогда, что оно выполняется для определителей порядка n.

Рассмотрим для определенности случай, когда *первая* строка определителя Δ есть сумма строк $\boldsymbol{a}_1'$ и $\boldsymbol{a}_2''$, т. е. будем считать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}' + a_{11}'' & a_{12}' + a_{12}'' & \ldots & a_{1n}' + a_{1n}'' \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \ldots & a_{1n}' \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' & \ldots & a_{1n}'' \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Миноры элементов первых строк в Δ, Δ' и Δ'', очевидно, совпадают:

$$M_{1j} = M'_{1j} = M''_{1j}. \tag{3}$$

С другой стороны, всякий минор M_{ij}, $i > 1$, в силу предположения индукции, есть сумма миноров M'_{ij} и M''_{ij}:

$$M_{ij} = M'_{ij} + M''_{ij} \text{ при } i > 1. \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) очевидным образом вытекает

$$A_{1j} = A'_{1j} = A''_{1j}$$

и

$$A_{ij} = A'_{ij} + A''_{ij} \text{ при } i > 1.$$

Следовательно,

$$L_1 = (a'_{11} + a''_{11}) A_{11} + \ldots + (a'_{1n} + a''_{1n}) A_{1n} = L'_1 + L''_1$$

и при $i > 1$

$$L_i = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} =$$
$$= a_{i1}(A'_{i1} + A''_{i1}) + \ldots + a_{in}(A'_{in} + A''_{in}) = L'_i + L''_i.$$

Теперь находим, что

$$\Delta = \frac{1}{n}(L_1 + \ldots + L_n) = \frac{1}{n}(L'_1 + \ldots + L'_n) + \frac{1}{n}(L''_1 + \ldots + L''_n) =$$
$$= \Delta' + \Delta''.$$

Свойство 2 доказано.

Свойство 3. *Определитель, содержащий нулевую строку (нулевой столбец), равен нулю.*

Доказательство (методом индукции) этого свойства мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Свойство 4. *Перестановка двух строк (столбцов) определителя умножает его на* -1.

Это — весьма важное свойство определителя. Будем его доказывать снова индукцией по n.

Рассмотрим сначала случай, когда переставляются две *соседние* строки.

При $n = 2$ имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}),$$

и, значит,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь наше утверждение доказано для определителей порядка $< n$. Рассмотрим какой-нибудь определитель Δ порядка

n. Пусть определитель $\widetilde{\Delta}$ получается из Δ перестановкой двух соседних строк, например первой и второй. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \widetilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Отсюда видно, что миноры элементов первой строки в Δ совпадают с соответствующими минорами элементов второй строки в $\widetilde{\Delta}$, т. е.

$$M_{1j} = \widetilde{M}_{2j}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_1 &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n} = \\ &= -(-a_{11}\widetilde{M}_{11} + a_{12}\widetilde{M}_{12} - \dots + a_{1n}(-1)^{2+n}\widetilde{M}_{1n}) = -\widetilde{L}_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Точно так же найдем, что

$$L_2 = -\widetilde{L}_1. \tag{6}$$

Миноры же третьей и последующих строк в определителе Δ получаются, очевидно, из соответствующих миноров в определителе $\widetilde{\Delta}$ перестановкой первой и второй строк. Поэтому, в силу предположения индукции, имеем при $i > 2$:

$$M_{ij} = -\widetilde{M}_{ij}$$

и тем самым

$$L_i = -\widetilde{L}_i. \tag{7}$$

Из формул (5) — (7) находим:

$$\Delta = \frac{1}{n}(L_1 + L_2 + \dots + L_n) = \frac{1}{n}(-\widetilde{L}_1 - \widetilde{L}_2 - \dots - \widetilde{L}_n) = -\widetilde{\Delta}.$$

Таким образом, при перестановке соседних строк определитель умножается на -1.

Пусть теперь переставляются *любые* две строки a и b. Такую перестановку можно осуществить, переставляя *нечетное* число раз соседние строки. Действительно, пусть строки a и b разделяются в данном определителе какими-то k строками $c_1, \dots, c_k$, т. е. последовательность строк в Δ такова:

$$\dots, a, c_1, \dots, c_k, b, \dots .$$

Переставляя строку a последовательно со строками $c_1, \dots, c_k, b$ (что означает $k+1$ перестановку соседних строк), получим определитель со строками

$$\dots, c_1, \dots, c_k, b, a, \dots .$$

Если теперь переставить строку b последовательно с k предыдущими строками (что означает k перестановок соседних строк), получим определитель со строками

$$\ldots,\ b,\ c_1,\ \ldots,\ c_k,\ a,\ \ldots\ .$$

Таким образом, строки a и b можно переставить с помощью $2k+1$ перестановок соседних строк. При этом определитель умножится на $(-1)^{2k+1}$, т. е. на -1. Свойство 4 доказано.

Из свойства 4 вытекает, в свою очередь, такое свойство определителя:

Свойство 5. *Определитель, содержащий две одинаковые строки (два одинаковых столбца), равен нулю.*

Действительно, пусть определитель Δ содержит две одинаковые строки. Поменяв их местами, получим определитель $\widetilde{\Delta}$, ничем не отличающийся от Δ, и, значит, $\widetilde{\Delta} = \Delta$. С другой стороны, в силу свойства 4, должно быть $\widetilde{\Delta} = -\Delta$. Из двух написанных равенств следует: $\Delta = -\Delta$, т. е. $\Delta = 0$.

При вычислении определителей, как мы увидим дальше, оказывается очень полезным один вид преобразования определителя, состоящий в том, что к одной строке определителя (или одному столбцу) прибавляется другая строка, умноженная на некоторое число (другой столбец, умноженный на некоторое число). Такое преобразование будем для краткости называть просто *строчным* (*столбцевым*)*.

Свойство 6. *Определитель не меняется при любом строчном (столбцевом) преобразовании.*

Действительно, пусть, например, к первой строке определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

прибавляется вторая строка, умноженная на число k. В результате такого преобразования получается определитель

$$\widetilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & \ldots & a_{1n} + ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Применяя последовательно свойства 2 и 1, получим:

$$\widetilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

* В § 4 рассматривались и другие виды строчных преобразований: перестановка строк и умножение строки на число, отличное от нуля.

Второй из определителей, стоящих в правой части, равен нулю в силу свойства 5. Следовательно,

$$\widetilde{\Delta} = \Delta.$$

Свойство 7. *Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, не меняя их порядка.*

Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— исходный определитель, а

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— определитель, полученный из данного указанной заменой строк столбцами. Мы должны показать, что $\Delta = \Delta'$.

При $n = 2$ равенство $\Delta = \Delta'$ проверяется непосредственно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Предположим, что для определителей порядка $< n$ равенство $\Delta = \Delta'$ справедливо, и в этом предположении докажем его для определителей порядка n.

Запишем определитель Δ' в виде

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix},$$

где число a'_{ij} равно элементу a_{ji} определителя Δ (например, $a'_{13} = a_{31}$). Согласно определению, данному в пункте 2 § 5, имеем:

$$\Delta = \frac{1}{n}\sum a_{ij}M_{ij},$$

$$\Delta' = \frac{1}{n}\sum a'_{ij}M'_{ij}.$$

Покажем, что каждому слагаемому первой суммы отвечает равное ему слагаемое второй суммы, а именно, что

$$a'_{ij}M'_{ij} = a_{ji}M_{ji}$$

при любых i, j (например, $a'_{13}M'_{13} = a_{31}M_{31}$); отсюда очевидным образом будет следовать: $\Delta = \Delta'$.

Для этого заметим прежде всего, что $a'_{ij} = a_{ji}$. Далее, M_{ji}

есть определитель, полученный из Δ вычеркиванием j-й строки и i-го столбца, а M'_{ij} — определитель, полученный из Δ' вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Отсюда ясно, что между определителями M_{ji} и M'_{ij} связь точно такая же, как и между Δ и Δ': один получается из другого заменой строк столбцами, с сохранением их порядка. Поэтому, в силу предположения индукции, $M'_{ij} = M_{ji}$. Свойство 7 доказано.

Отметим, что операция перехода от Δ к Δ' называется транспонированием. Таким образом, содержание свойства 7 можно выразить словами: *определитель не меняет своего значения при транспонировании.*

§ 7. РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СТРОКЕ ИЛИ СТОЛБЦУ

1. Основная теорема. Практическое вычисление определителей основано на следующей теореме, играющей во всей теории определителей центральную роль:

Теорема. *Определитель порядка $n \geqslant 2$ равен любой из своих строчных или столбцевых сумм.*

Доказательству теоремы предпошлем две простые леммы.

Лемма 1. *Никакая столбцевая сумма не меняется при строчном преобразовании.* Аналогично *никакая строчная сумма не меняется при столбцевом преобразовании.*

Докажем первое из этих утверждений (второе доказывается аналогично).

Пусть, например, определитель $\widetilde{\Delta}$ получается из Δ, как в доказательстве свойства 6, т. е. к первой строке прибавляется вторая, умноженная на число k. Рассмотрим для определенности первую из столбцевых сумм определителя $\widetilde{\Delta}$:

$$\widetilde{H}_1 = (a_{11} + ka_{21})\,\widetilde{M}_{11} - a_{21}\,\widetilde{M}_{21} + a_{31}\widetilde{M}_{31} + \ldots + a_{n1}(-1)^{n+1}\,\widetilde{M}_{n1}.$$

Ясно, что $\widetilde{M}_{11} = M_{11}$. Далее,

$$\widetilde{M}_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} + ka_{22} & \ldots & a_{1n} + ka_{2n} \\ a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ k \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = M_{21} + kM_{11}.$$

Кроме того, поскольку миноры $\widetilde{M}_{31}, \ldots, \widetilde{M}_{n1}$ получаются соответственно из миноров $M_{31}, \ldots, M_{n1}$ строчным преобразованием, то они равны друг другу в указанном порядке, т. е.

$$\widetilde{M}_{31} = M_{31}, \ldots, \widetilde{M}_{n1} = M_{n1},$$

поэтому

$$\widetilde{H}_1 = (a_{11} + ka_{21}) M_{11} - a_{21} (M_{21} + kM_{11}) + a_{31} M_{31} - \ldots + \\ + a_{n1} (-1)^{n+1} M_{n1} = H_1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— определитель порядка n, а i и $i+1$ — номера каких-нибудь двух его соседних столбцов. Тогда с помощью строчных преобразований определитель можно привести к виду

$$\widetilde{\Delta} = \left|\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} \ldots & 0 & 0 & \ldots b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & b_{ii} & b_{i,\,i+1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & b_{i+1,\,i+1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots \\ b_{n1} \ldots & 0 & 0 & \ldots b_{nn} \end{array}\right|,$$

где все элементы i-го и $(i+1)$-го столбцов, отличные от b_{ii}, $b_{i,\,i+1}$, $b_{i+1,\,i+1}$, равны нулю.

Доказательство. Если среди элементов i-го столбца имеются отличные от нуля, то можно считать, что $a_{ii} \neq 0$, в противном случае строку с ненулевым элементом в i-м столбце можно было бы прибавить к i-й строке. Прибавляя i-ю строку к остальным строкам с подходящими коэффициентами, мы получим определитель, в котором все элементы i-го столбца, отличные от b_{ii}, равны нулю. Далее, если среди элементов $(i+1)$-го столбца, отличных от $b_{i,\,i+1}$, имеются ненулевые, то снова можно считать, что $b_{i+1,\,i+1} \neq 0$, и добиться, чтобы все другие элементы этого столбца обратились в нули.

Теперь мы можем обратиться непосредственно к доказательству теоремы. Ввиду «равноправия» между строками и столбцами (см. свойство 7 § 6) ограничимся доказательством лишь одного из двух утверждений теоремы, а именно: определитель порядка $n \geqslant 2$ равен любой из своих столбцевых сумм. Доказательство проведем индукцией по n.

При $n = 2$ наше утверждение проверяется непосредственно: если Δ есть определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

то имеем:

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} = H_1$$

и

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = -a_{12} M_{12} + a_{22} M_{22} = H_2.$$

Предположим, что теперь утверждение теоремы справедливо для определителей порядка $< n$; докажем тогда, что оно справедливо и для определителей порядка n.

Убедимся сначала, что любые две соседние столбцевые суммы H_i, H_{i+1} определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

совпадают. Для определенности докажем равенство $H_1 = H_2$.

Пользуясь леммой 2, преобразуем определитель Δ с помощью строчных преобразований к виду

$$\widetilde{\Delta} = \left|\begin{array}{cc|ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{array}\right|,$$

где все элементы первых двух столбцов, расположенные «ниже» диагональных элементов b_{11}, b_{22}, равны нулю. Тогда, по предположению индукции,

$$\widetilde{H}_1 = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = b_{11}\, b_{22} \begin{vmatrix} b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Кроме того, учитывая свойство 3 определителя (см. § 6), а также предположение индукции, находим:

$$\widetilde{H}_2 = -b_{12} \begin{vmatrix} 0 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} + b_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{22}\, b_{11} \begin{vmatrix} b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_2$. А так как по лемме 1 $H_1 = \widetilde{H}_1$ и $H_2 = \widetilde{H}_2$, то $H_1 = H_2$.

Обратимся теперь к формуле

$$\Delta = \frac{1}{n}(H_1 + H_2 + \dots + H_n).$$

Учитывая, что все слагаемые $H_1, H_2, \dots, H_n$ равны между собой, находим:

$$\Delta = H_1 = H_2 = \dots = H_n.$$

Теорема доказана

Итак, для всех $i = 1, 2, \dots, n$ имеют место равенства

$$\Delta = L_i = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} \qquad (3)$$

и

$$\Delta = H_i = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni}, \qquad (4)$$

т. е. *определитель равен сумме произведений элементов любой строки (любого столбца) на их алгебраические дополнения.*

Равенство (3) называется *разложением определителя по элементам i-й строки (или просто по i-й строке)*, а равенство (4) — *разложением определителя по элементам i-го столбца (или просто по i-му столбцу).*

В заключение этого пункта используем формулу разложения определителя по строке (столбцу) для доказательства одного свойства определителей. Учитывая, что установленные свойства имели номера 1—7, дадим последнему свойству номер 8.

Свойство 8. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.*

Допустим, например, что элементы второго столбца умножаются на алгебраические дополнения элементов первого столбца. Мы должны показать, что

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1} = 0.$$

Для любых чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место тождество

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1}.$$

Полагая $b_1 = a_{12}$, $b_2 = a_{22}$, ..., $b_n = a_{n2}$, получаем:

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Справа стоит определитель с двумя одинаковыми столбцами (первым и вторым), который равен нулю. Тем самым и левая часть равна нулю, что и требовалось доказать.

2. Определители третьего порядка. Разложением определителя по строке или столбцу можно пользоваться для практического вычисления определителей. В качестве примера установим простой способ вычисления определителя третьего порядка.

Пусть дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Разлагая его по элементам первой строки, получим:

$$\Delta = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Раскрывая скобки, приходим к формуле

$$\Delta = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - \\ - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}. \qquad (5)$$

Полученное выражение для определителя третьего порядка запомнить, конечно, не очень просто. Однако имеется весьма удобный способ для нахождения суммы (5). Он состоит в следующем.

К матрице A данного определителя приписываем повторно первую и вторую строки:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

после чего со знаком плюс берем произведения элементов по три, показанных на таблице 1, а со знаком минус — также произведения элементов по три, показанных на таблице 2.

Таблица 1

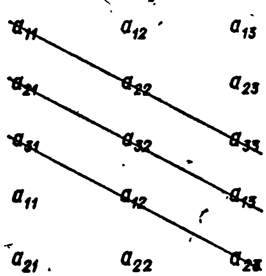
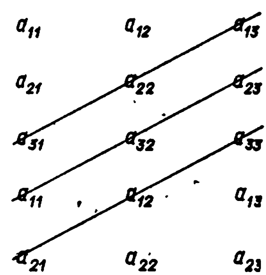


Таблица 2



Пример. Вычислить определитель 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Поступая так, как указано выше, записываем матрицу:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1, \end{matrix}$$

после чего находим, что искомый определитель равен:

$1 \cdot 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 \cdot 1 -$
$- 5 \cdot 2 \cdot 0 = -1.$

3. Практический прием вычисления определителей. Формула разложения определителя по строке (или столбцу) принимает особенно простой вид, когда в этой строке (или в этом столбце) все элементы, кроме одного, скажем a_{ij}, равны нулю. В этом случае

$$\Delta = a_{ij}A_{ij}$$

или

$$\Delta = a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij},$$

тем самым вычисление определителя n-го порядка Δ сводится к вычислению единственного определителя $(n-1)$-го порядка M_{ij}.

Хотя в заданном определителе Δ может и не оказаться строки или столбца с нужным количеством нулей, тем не менее всегда можно, не изменяя величины определителя, преобразовать его так, чтобы в выбранной (по желанию) строке или в выбранном столбце все элементы, кроме одного, обратились в нуль. Для этой цели достаточно использовать одно из свойств определителя, а именно: определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, или, выражаясь короче, если к одной строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на любое число. Рассмотрим на конкретном примере способ приведения определителя к нужному виду.

Пример. Вычислить определитель 5-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Во второй строке определителя уже имеются два нуля, поэтому займемся именно этой строкой. Постараемся, не изменяя величины определителя, преобразовать его так, чтобы во второй строке все элементы, кроме a_{24}, равного 1, оказались равными нулю. Очевидно, для этого достаточно ко второму столбцу прибавить четвертый, умноженный на 2, а к третьему столбцу — четвертый, умноженный на -2. После этих преобразований получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix},$$

равный исходному. Разлагаем его по элементам второй строки:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе удобно выбрать второй столбец, поскольку в нем уже имеется один нуль. Преобразуем определитель так, чтобы все элементы второго столбца, кроме $a_{12} = -1$, стали равными нулю. Для этой цели из третьей строки вычитаем первую, а из четвертой — удвоенную первую. Получаем определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix},$$

по-прежнему равный Δ. Разлагая его по второму столбцу, находим

$$\Delta = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель 3-го порядка можно было бы вычислить непосредственно. Однако еще проще разложить его по первому столбцу, в результате чего получим:

$$\Delta = (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

§ 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ n-ГО ПОРЯДКА

В этом параграфе приводится ряд примеров на вычисление определителей произвольного (n-го) порядка, элементы которых подчинены той или другой закономерности. Никаких общих рецептов для вычисления определителей n-го порядка, естественно, дать нельзя (если, конечно, не рассматривать само определение как один из способов). В каждом отдельном случае нужно догадаться, как, не изменяя величины определителя, привести его к такому виду, чтобы величину его можно было определить сразу (на основании тех или иных свойств определителей); или же, произведя разложение по элементам строки или столбца, свести нахождение данного определителя к нахождению одного или нескольких определителей более низкого порядка с ясно выраженной закономерностью в расположении элементов.

Напомним, что в определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

диагональ, ведущая от a_{11} к a_{nn}, называется *главной диагональю*. Элементы, стоящие на главной диагонали, суть

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ \ldots,\ a_{nn}.$$

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

Решение. Разложим определитель Δ по первой строке:

$$\Delta = a_{11}A_{11} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель, стоящий справа, можно снова разложить по первой строке, тогда получим:

$$\Delta = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n3} & a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

И так далее. После n шагов придем к равенству

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}.$$

Пример 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. В данном определителе все элементы главной диагонали, кроме первого, равны нулю. Далее, в любом i-м столбце ($i = 2, 3, \ldots, n$) все элементы, расположенные выше нулевого, равны i, а все элементы, расположенные ниже нуля, равны $-i$. Заметив это, легко сообразить, что если к каждой строке определителя, начиная со второй, прибавить первую строку, то получится определитель, в котором все элементы, находящиеся ниже главной диагонали, будут равны нулю. А именно, получится определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 2 & 6 & \ldots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 2n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix},$$

равный исходному. Рассуждая, как в примере 1, найдем, что он равен произведению элементов главной диагонали, т. е. $n!$

Способ, с помощью которого вычислен определитель примера 2, называется *способом приведения к треугольному виду*. С помощью преобразований, не меняющих величины определителя, мы привели его к виду, в котором все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю, или, как говорят, к треугольному виду; такой определитель (см. пример 1) равен произведению диагональных элементов.

Пример 3. Вычислить определитель n-го порядка

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ . & . & . & & . \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Решение. В этом определителе все элементы главной диагонали равны a, а остальные элементы равны b. Если вычесть из всех строк первую, то получим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ b-a & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix},$$

который еще не является определителем треугольного вида, но легко приводится к такому виду: для этого достаточно к первому столбцу прибавить сумму всех остальных столбцов. В результате такого преобразования получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix},$$

откуда $\Delta = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$.

Пример 4. Вычислить определитель порядка n

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. В данном определителе все элементы главной диагонали равны 3, соседняя сверху диагональ составлена из двоек, соседняя снизу — из единиц; все остальные элементы равны нулю. Метод, с помощью которого вычисляются подобные определители, называют методом *рекуррентных* (возвратных) *соотношений*. Он заключается в том, что данный определитель выражают через определители такого же типа, но более низкого порядка. Полученное равенство называется *рекуррентным соотношением*.

В нашем случае рекуррентное соотношение получается следующим образом. Обозначим данный определитель n-го порядка через Δ_n. Разложим его по элементам первой строки:

$$\Delta_n = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \dots & \\ 0 & 0 & & \dots & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \dots & \\ 0 & 0 & & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Первый из определителей, стоящих в правой части, есть не что иное, как Δ_{n-1}; что же касается второго, то, разложив его по элементам первого столбца, найдем, что он равен Δ_{n-2}. Итак, имеем рекуррентное соотношение:

$$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}.$$

В принципе отсюда можно получить выражение Δ_n через Δ_3 и Δ_2; однако это выражение не так просто. Сделаем по-другому. Запишем полученное соотношение следующим образом:

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}).$$

Отсюда сразу видно, что числа $a_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Следовательно, $a_n = 2^{n-2}a_2$, или

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2^{n-2}(\Delta_2 - \Delta_1).$$

Но

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7,\ \Delta_1 = 3,$$

так что $\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2^{n-2} \cdot 4 = 2^n$. Итак,

$$\Delta_n = 2^n + \Delta_{n-1}.$$

Отсюда последовательно находим:

$$\begin{aligned}\Delta_n &= 2^n + 2^{n-1} + \Delta_{n-2} = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \Delta_{n-3} = \dots = \\ &= 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^2 + \Delta_1 = \\ &= 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^2 + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1,\end{aligned}$$

что и решает поставленную задачу.

Заметим, что если рекуррентное соотношение имеет более общий характер:

$$\Delta_n = p\Delta_{n-1} + q\Delta_{n-2}\ (n > 2), \tag{1}$$

то поступаем следующим образом: подбираем числа α и β так, чтобы соотношение (1) можно было записать в виде

$$\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \beta(\Delta_{n-1} - \alpha\Delta_{n-2}). \tag{2}$$

Сравнивая соотношения (1) и (2), мы видим, что α и β должны удовлетворять условиям: $\alpha + \beta = p$, $-\alpha\beta = q$, т. е. должны являться корнями квадратного уравнения

$$x^2 - px - q = 0.$$

После того как найдены α и β, поступаем, как в примере 4.

§ 9. УСЛОВИЕ ВЫРОЖДЕННОСТИ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ. ТЕОРЕМА ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Необходимое и достаточное условие вырожденности. Напомним, что квадратную матрицу A порядка n мы условились называть невырожденной, если система ее строк линейно независима, и вырожденной, если между строками существует линейная зависимость. Практически для выяснения вопроса о вырожденности или невырожденности матрицы A мы располагаем пока только одним способом. Он состоит в нахождении ранга матрицы; если последний равен n, матрица A невырожденная, если ранг меньше n — вырожденная. Существует, однако, и более простой способ. Оказывается, достаточно подсчитать определитель матрицы A; если он отличен от нуля, матрица A — невырожденная, если определитель равен нулю, матрица A — вырожденная.

Теорема. *Матрица A вырождена тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.*

Доказательство. Пусть A — вырожденная матрица; докажем, что ее определитель $|A|$ равен нулю.

По условию между строками матрицы A существует линейная зависимость, т. е. одна из строк есть линейная комбинация остальных. Пусть, например, $\boldsymbol{a}_1 = k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3 + \ldots + k_n\boldsymbol{a}_n$, где $\boldsymbol{a}_i$ обозначает i-ю строку матрицы A. Тогда, прибавив к первой строке определителя $|A|$ вторую, умноженную на $-k_2$, затем третью, умноженную на $-k_3$, и т. д., получим определитель, в котором первая строка будет состоять из нулей; такой определитель, как мы знаем, равен нулю. При указанных преобразованиях значение определителя $|A|$ не менялось. Следовательно, он тоже равен нулю.

Обратно, пусть определитель $|A|$ равен нулю; докажем, что матрица A вырожденная.

Предположим, что это не так. Тогда на основании леммы пункта 1 § 4 матрицу A с помощью строчных преобразований можно привести к единичной матрице E. С другой стороны, легко видеть, что после любого строчного преобразования определитель, равный нулю, переходит снова в определитель, равный нулю. Отсюда, поскольку $|A| = 0$, должно следовать, что $|E| = 0$. Но это невозможно (определитель матрицы E равен 1). Полученное противоречие доказывает, что матрица A вырожденная.

2. Определитель произведения двух матриц. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц.*

Доказательство. Наша цель — доказать формулу

$$|AB| = |A| \cdot |B| \qquad (1)$$

для любых двух квадратных матриц A и B данного порядка.

Прежде всего заметим, что равенство (1) справедливо, если матрица A единичная. Действительно, $EB = B$, поэтому

$$|EB| = |B| = 1 \cdot |B| = |E| \cdot |B|.$$

Установим теперь такую лемму.

Лемма. *Если справедливо равенство*

$$|A'B| = |A'| \cdot |B|, \qquad (2)$$

то справедливо и равенство

$$|A''B| = |A''| \cdot |B|, \qquad (3)$$

где матрица A'' получается из A' одним из строчных преобразований.

Доказательство леммы. Пусть матрица A'' получается из A' одним из преобразований:

α) перестановка строк;

β) умножение любой строки на число k, не равное нулю;

γ) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на какое-либо число.

Матрица $A''B$ получается из $A'B$ таким же преобразованием (это вытекает из самого правила умножения матриц). Отсюда имеем:

в случае преобразования α)

$$|A''| = -|A'|, \ |A''B| = -|A'B| \qquad (4)$$

(при перестановке двух строк определитель умножается на —1), в случае преобразования β)

$$|A''| = k|A'|, \ |A''B| = k|A'B| \qquad (5)$$

и в случае преобразования γ)

$$|A''| = |A'|, \ |A''B| = |A'B|. \qquad (6)$$

Любая пара равенств (4), (5) или (6) в соединении с (2) дает (3). Лемма доказана.

Из леммы, а также из равенства $|EB| = |E|\ |B|$ вытекает, что равенство (1) справедливо во всех случаях, когда матрица A получается из единичной матрицы с помощью преобразований α), β), γ). Но согласно лемме пункта 1 § 4 таким путем может быть получена любая невырожденная матрица A. Отсюда следует, что равенство (1) выполняется для любой невырожденной матрицы A.

Остается рассмотреть случай, когда матрица A вырожденная, т. е. когда между ее строками существует линейная зависимость. Но тогда точно такая же зависимость существует и между строками матрицы AB (см. лемму пункта 3 § 3). Следовательно, матрица AB также является вырожденной. Мы имеем, таким образом, $|A| = 0$ и $|AB| = 0$, откуда следует $|AB| = |A| \cdot |B|$. Теорема доказана.

Рассмотрим пример.

Пусть требуется вычислить определитель n-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Внимательно рассмотрев матрицу определителя (7), замечаем, что ее можно представить как произведение двух матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

При $n > 2$ определитель каждой из них равен нулю. Отсюда по доказанной выше теореме следует, что при $n > 2$ определитель (7) равен $0 \cdot 0 = 0$. Если же $n = 2$, то

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Вопросы и упражнения

1. Доказать непосредственно, что $|AB| = |A| \cdot |B|$, если матрица A имеет элементы $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{rr} = 1$ $(r \leqslant n)$, остальные $a_{ij} = 0$.

2. Доказать теорему об умножении определителей, используя тот факт, что любая матрица A с помощью элементарных преобразований (см. § 1 гл. II) приводится к виду, указанному в предыдущем упражнении.

§ 10. УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕНУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ n ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n НЕИЗВЕСТНЫМИ

Рассмотрим однородную систему

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

n линейных уравнений с n неизвестными. В § 9 главы III мы установили для произвольной однородной системы необходимое и достаточное условие существования ненулевого решения: ранг матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, должен быть меньше числа неизвестных. Для системы (1) матрица A есть

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

следовательно, ненулевое решение системы существует в том и только в том случае, если ранг этой матрицы меньше n, т. е. когда матрица A вырожденная. Принимая во внимание теорему пункта 1 предыдущего параграфа, приходим к следующему заключению.

Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, равен нулю.

Рассмотрим два примера.

1. Вывести условие принадлежности трех точек—

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ M_3(x_3, y_3)$$

одной прямой.

Решение. Предположим, что точки M_1, M_2, M_3 лежат на одной прямой. Пусть уравнение этой прямой будет

$$ax + by + c = 0, \tag{2}$$

где числа a и b не равны нулю одновременно.

Принадлежность точек M_1, M_2, M_3 прямой (2) запишется с помощью равенств:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c = 0, \\ ax_2 + by_2 + c = 0, \\ ax_3 + by_3 + c = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную систему трех однородных уравнений с тремя неизвестными X, Y, Z:

$$\left.\begin{aligned} x_1X + y_1Y + Z = 0, \\ x_2X + y_2Y + Z = 0, \\ x_3X + y_3Y + Z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Равенства (3) показывают, что эта система имеет ненулевое решение:

$$X = a,\ Y = b,\ Z = c.$$

В силу доказанного выше предложения отсюда вытекает, что определитель из коэффициентов при неизвестных в системе (4) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Равенство (5) является, таким образом, необходимым условием принадлежности точек M_1, M_2, M_3 одной прямой.

Покажем, что это условие является также и достаточным. В самом деле, если выполнено это условие, то система (4) имеет ненулевое решение. Пусть это решение будет: $X = a$, $Y = b$, $Z = c$. Хотя бы одно из чисел a или b отлично от нуля: в противном случае из системы (4) следовало бы, что и $c = 0$, т. е. решение (a, b, c) нулевое. Таким образом, уравнение (2) есть уравнение прямой, которой принадлежат точки M_1, M_2, M_3.

2. Найти условие принадлежности четырех точек

$$M_i (x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

одной окружности.

Решение. Найдем сначала необходимое условие. Пусть точки M_1, M_2, M_3, M_4 принадлежат одной окружности h. Уравнение окружности h имеет вид:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

где a, b, c — некоторые числа. Принадлежность точек M_1, M_2, M_3, M_4 окружности γ запишется в виде равенств:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0, \\ x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0, \\ x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0, \\ x_4^2 + y_4^2 + ax_4 + by_4 + c = 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Рассмотрим следующую однородную систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными U, X, Y, Z:

$$\left.\begin{aligned} (x_1^2 + y_1^2) U + x_1 X + y_1 Y + Z = 0 \\ (x_2^2 + y_2^2) U + x_2 X + y_2 Y + Z = 0 \\ (x_3^2 + y_3^2) U + x_3 X + y_3 Y + Z = 0 \\ (x_4^2 + y_4^2) U + x_4 X + y_4 Y + Z = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (7)$$

Равенства (6) показывают, что эта система имеет ненулевое решение:

$$U = 1, X = a, Y = b, Z = c.$$

Отсюда вытекает, по доказанному, что определитель из коэффициентов при неизвестных равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Это и есть необходимое условие принадлежности точек M_1, M_2, M_3, M_4 одной окружности.

Нетрудно показать, что если точки M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат на одной прямой, то условие (8) является также и достаточным. Действительно, пусть условие (8) выполнено. Тогда система (7) имеет какое-то ненулевое решение

$$U_0,\ X_0,\ Y_0,\ Z_0$$

и, следовательно, точки M_1, M_2, M_3, M_4 принадлежат кривой

$$U_0(x^2+y^2)+X_0x+Y_0y+Z_0=0. \tag{9}$$

При этом $U_0 \neq 0$: в противном случае получилось бы, что данные точки лежат на одной прямой $X_0x+Y_0y+Z_0=0$, вопреки условию. Разделив обе части уравнения (9) на U_0, получим уравнение кривой, содержащей данные точки, в виде

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

где $a=\frac{X_0}{U_0}$, $b=\frac{Y_0}{U_0}$, $c=\frac{Z_0}{U_0}$. Выделяя полные квадраты с x и y, приведем это уравнение к виду

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma. \tag{10}$$

Число γ не может быть отрицательным, так как в этом случае кривая не содержала бы ни одной точки (была бы «пустой»); не может также быть $\gamma=0$, так как в этом случае кривая состояла бы из одной точки (α, β). Следовательно, $\gamma>0$, а, значит, уравнение (10) есть уравнение окружности радиуса $\sqrt{\gamma}$ с центром (α, β).

Вопросы и упражнения

1. Как формулируется условие существования ненулевого решения для однородной системы n линейных уравнений с n неизвестными? Постарайтесь для системы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=0 \end{aligned}\right\}$$

дать непосредственное доказательство необходимости и достаточности этого условия.

2. При каких значениях a система

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z&=0\\ x+ay+z&=0\\ x+y+az&=0 \end{aligned}\right\}$$

имеет ненулевое решение?

3. Выведите условие принадлежности четырех точек $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ параболе

$$y=ax^2+bx+c.$$

§ 11. ПРАВИЛО КРАМЕРА ДЛЯ СИСТЕМЫ n ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. Формула для обратной матрицы. Ранее мы показали, что обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная. Принимая во внимание, что невырожденные матрицы — это в точности матрицы с неравными нулю определителями (§ 9), можно сформулировать условие существования обратной матрицы иначе: *матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда определитель $|A|$ матрицы A отличен от нуля.*

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_{n1}a_{n2}\dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Предполагая матрицу A невырожденной, докажем следующую формулу, дающую явный вид матрицы A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12}A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n}A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

(Обратим внимание на тот факт, что элемент матрицы A^{-1}, расположенный в i-й строке и j-м столбце, равен $\frac{A_{ji}}{|A|}$, а не $\frac{A_{ij}}{|A|}$.) Здесь A_{ij} обозначает, как и раньше, алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} в определителе $|A|$.

Чтобы проверить справедливость формулы (1), достаточно умножить указанную в ней матрицу слева на A; в произведении должна получиться единичная матрица E. Это проверяется совсем несложно. Для матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен:

$$\frac{1}{|A|}(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn});$$

при $i = j$ это выражение равно 1 (ибо в скобках стоит разложение определителя по i-й строке), если же $i \neq j$, то написанное выражение равно нулю в силу одного из свойств определителей (см. свойство 8 § 7). Таким образом, написанное произведение равно единичной матрице E, что и требовалось доказать.

Пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

найти обратную, если $|A| \neq 0$.

По формуле (1) имеем:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} \\ -M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. Система линейных уравнений в матричной форме. Обратимся к системе линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Весьма замечательно, что каждую такую систему можно записать в виде одного *матричного уравнения*. Для этой цели введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(матрицы X и B содержат каждая по одному столбцу). Произведение AX будет, очевидно, матрицей типа $(m, 1)$ (m строк и один столбец), т. е. столбцом из m чисел. Написав эти числа:

$$\boxed{a_{11}x_1 + x_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}$$

$$\boxed{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\boxed{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n},$$

мы тотчас замечаем, что система (2) может быть представлена в виде одного уравнения

$$AX = B. \qquad (3)$$

Это уравнение и является, таким образом, *матричной формой системы* (2).

Рассмотрим наиболее важный случай, когда $m = n$, т. е. число уравнений в системе (2) совпадает с числом неизвестных. Тогда матрица A — квадратная. Если она невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части уравнения (3) слева на A^{-1}, получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$, или, если учесть, что $A^{-1}A = E$,

$$X = A^{-1}B. \qquad (4)$$

Подставляя в уравнение (3) матрицу X, определяемую этим равенством, получим, как нетрудно видеть, тождество $B = B$.

Итак, *формула* (4) *дает матричную запись решения системы n линейных уравнений с n неизвестными при условии, что матрица A системы является невырожденной.*

3. Правило Крамера. Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\},$$

причем матрица A из коэффициентов при неизвестных невырожденная. Тогда, как мы знаем, решение системы дается формулой

$$X = A^{-1}B,$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}A_{21}\ldots A_{n1} \\ A_{12}A_{22}\ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots \\ A_{1n}A_{2n}\ldots A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, стоящие в правой части, получаем:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{|A|}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n), \\ x_2 &= \frac{1}{|A|}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{1}{|A|}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n). \end{aligned} \tag{5}$$

Если первую из сумм, заключенных в скобки, переписать в виде

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1},$$

то станет очевидно, что эта сумма есть разложение по первому столбцу определителя

$$\begin{vmatrix} b_1\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ b_2\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots \\ b_n a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

матрица которого A_1 получается из матрицы A заменой первого столбца столбцом свободных членов системы. Итак,

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}.$$

Аналогичным образом перепишется выражение для x_2:

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},$$

где матрица A_2 получается из A заменой элементов второго столбца свободными членами. Вообще, всю совокупность равенств (5) можно записать теперь в следующем виде:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Мы приходим, таким образом, к следующему правилу, которое носит название *правила Крамера для системы n уравнений с n неизвестными.*

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными, причем определитель матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, не равен нулю. Тогда система имеет единственное решение. Это решение дается формулами:*

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

где матрица A_i получается из матрицы A заменой i-го столбца (т. е. столбца коэффициентов при x_i в данной системе) *столбцом свободных членов системы.*

Следует отметить, что практическое значение правила Крамера невелико, ибо в тех случаях, когда оно применимо, для нахождения решения нужно вычислить $n+1$ определителей: $|A_1|$, $|A_2|$, ..., $|A_n|$, $|A|$. С практической точки зрения гораздо более удобным является метод Гаусса.

Вопросы и упражнения

1. Доказать, опираясь на критерий совместности системы линейных уравнений, что если определитель $|A|$ равен нулю, а какой-нибудь из определителей $|A_1|$, $|A_2|$, ..., $|A_n|$ не равен нулю, то система несовместна.

2. Показать, что в случае, когда все определители $|A|$, $|A_1|$, $|A_2|$, ..., $|A_n|$ равны нулю, система либо несовместна, либо имеет бесчисленное множество решений.

3. Показать, что если система

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= \\ \cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= \end{aligned}$$

(свободные члены не указаны) имеет решение при любом выборе свободных членов, то матрица A из коэффициентов при неизвестных невырожденная (у к а з а н и е: воспользоваться критерием совместности системы).

---

* Он называется *определителем системы.*

§ 12. ТЕОРЕМА О РАНГЕ МАТРИЦЫ

Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

выделены какие-либо k строк и k столбцов; разумеется, $k \leqslant n$ и $k \leqslant m$. Элементы, расположенные на пересечении этих строк и столбцов, составляют квадратную матрицу A' порядка k (подматрицу матрицы A). Ее определитель $|A'|$ называют *минором k-го порядка данной матрицы A.*

Среди миноров матрицы A особый интерес представляют миноры, не равные нулю. Следующая теорема неожиданным образом связывает ранг матрицы с наибольшим порядком этих миноров.

Теорема (о ранге матрицы). *Ранг матрицы равен максимальному порядку ее миноров, отличных от нуля.*

Другими словами, если ранг матрицы A равен r, то в этой матрице обязательно имеется минор r-го порядка, отличный от нуля, а все миноры, порядок которых больше r, равны нулю.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда система всех строк матрицы A линейно независима. В этом случае ранг матрицы A равен m (числу строк) и наша задача — показать, что существует отличный от нуля минор m-го порядка.

С помощью элементарных преобразований матрица A приводится к виду

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2m} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & b_{mm} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

где «диагональные» элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{mm}$ отличны от нуля. Подчеркнем, что число строк матрицы B в точности совпадает с числом строк матрицы A; это объясняется тем, что обе матрицы должны иметь один и тот же ранг, между тем для каждой из них ранг равен числу строк. Таким образом, переход от A к B совершается без вычеркивания нулевых строк, т. е. исключительно за счет элементарных преобразований следующих типов: перестановка столбцов и прибавление к одной строке другой, умноженной на некоторое число.

Напомним теперь два свойства определителей:

1) при перестановке двух столбцов определитель умножается на -1;

2) значение определителя не изменится, если к одной из его строк прибавить другую, умноженную на любое число.

Из этих двух предложений непосредственно вытекает, что если все миноры m-го порядка в матрице A равны нулю, то это же самое верно и в отношении матрицы B. Но среди миноров m-го порядка матрицы B явно имеются отличные от нуля: например, минор

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} \dots b_{mm} \neq 0.$$

Поэтому и среди миноров порядка m матрицы A также есть отличные от нуля. Этим мы доказали теорему для частного случая, когда система всех строк матрицы A линейно независима.

Обратимся к общему случаю. Пусть A — произвольная матрица и r — наивысший порядок ее отличных от нуля миноров. Мы должны показать, что ранг матрицы A равен r.

По условию в матрице A имеется минор M порядка r, отличный от нуля, а все миноры более высоких порядков равны нулю. Не ограничивая общности, можно считать, что минор M расположен в первых r строках $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ (этого всегда можно добиться перестановкой строк). Прежде всего ясно, что эти строки линейно независимы: в противном случае линейная зависимость между ними была бы также линейной зависимостью между строками минора M, а это, в свою очередь, влекло бы за собой равенство $M = 0$, что противоречит условию. Покажем, что все строки матрицы A, начиная с $(r+1)$-й, являются линейными комбинациями первых r строк.

Действительно, если бы это было неверно, т. е. какая-то из строк $a_{r+1}, \ldots, a_m$ не являлась бы линейной комбинацией строк $a_1, \ldots, a_r$, то, присоединив ее к первым r строкам, мы получили бы линейно независимую систему из $r+1$ строк. Но тогда в этих $r+1$ строках обязательно нашелся бы минор $r+1$-го порядка, отличный от нуля (это утверждение есть не что иное, как рассмотренный выше частный случай доказываемой нами теоремы). Между тем все миноры порядка выше r по условию равны нулю. Полученное противоречие показывает, что все строки, начиная с $(r+1)$-й, являются линейными комбинациями первых r строк. Принимая во внимание, что первые r строк линейно независимы, находим, что ранг матрицы A равен r. Теорема полностью доказана.

В качестве следствия получаем теорему, доказанную ранее (§ 6 главы III) другим способом: *максимальное число линейно независимых строк матрицы совпадает с максимальным числом линейно независимых столбцов.*

В самом деле, рассмотрим наряду с матрицей A «транспонированную» матрицу A':

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(Строки матрицы A являются столбцами матрицы A', и притом с теми же номерами.) Чтобы доказать требуемое предложение, достаточно проверить, что

$$\text{ранг } A = \text{ранг } A'. \tag{1}$$

Действительно, величина, стоящая в левой части, есть максимальное число линейно независимых строк матрицы A, в правой же части стоит максимальное число линейно независимых строк матрицы A'; но последнее есть то же самое, что максимальное число линейно независимых столбцов матрицы A.

Итак, остается проверить равенство (1). Эта задача, в силу теоремы о ранге матрицы, равносильна следующей: доказать, что максимальные порядки отличных от нуля миноров в матрицах A и A' совпадают. Но последнее предложение непосредственно вытекает из простейшего свойства определителей (определитель не меняется при транспонировании), ибо при переходе от A к A' каждый минор матрицы A заменяется «транспонированным» минором и, следовательно, не меняет своей величины.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Федор Леонидович Варпаховский

Александр Самуилович Солодовников

АЛГЕБРА

Редактор Л. В. Туркестанская
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор Е. В. Кузьмина
Корректоры К. А. Иванова, В. Ф. Малышева

Сдано в набор 16.05.80. Подписано к печати 13.02.81. 60×90 1/16. Бум. типограф. № 3. Гарн. лит. Печать высокая. Усл. печ. л. 10,5 Уч.-изд. л. 9,98. Тираж 27 000 экз. Заказ № 405. Цена 35 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

35 коп.